# INTRODUCCION AL ANALISIS NO STANDARD Y A SUS APLICACIONES EN PROBABILIDAD

Leopoldo Bertossi D.

Nº 14



PUBLICACION DE LA PONTIFICIA
UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

AUSPICIO SOCIEDAD
MATEMATICA DE CHILE

notas matemáticas

**NOTAS MATEMATICAS** es una colección publicada por la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile con el auspicio de la Sociedad Matemática de Chile.

**Propósito de la colección.**
La colección NOTAS MATEMATICAS intenta ser un medio de publicación rápida de textos matemáticos de alguno de los siguientes tipos:

1. Tésis y memorias que contengan resultados orginales.
2. Artículos de síntesis sobre resultados recientes en un tema dado o nuevas presentaciones de temas clásicos.
3. Textos de cursos y seminarios de postgrado.
4. Actas de coloquios y congresos.

**Presentación de los proyectos.**
Los proyectos de volúmenes para publicación deben ser presentados a cualquier miembro del comité editor que se indica más abajo. Sólo se admiten trabajos en los siguientes idiomas: español, portugués, francés, inglés o alemán.
Cada volumen debe tener una extensión no inferior a 70 páginas y ser dactilografiado en formato A4 (22 cm. x 27,5 cm.) dejando márgenes superior e inferior de 4 cm. cada uno y laterales de 3 cm. a cada lado.
Los manuscritos serán reducidos al formato 17,5 cm. x 24,5 cm. por lo que se recomienda usar doble espacio en la dactilografía.



**NOTAS MATEMATICAS** is published by the Faculty of Mathematics of the Pontificia Universidad Católica de Chile and sponsored by the Sociedad de Matemática de Chile

**Purpose of the series.**
The series NOTAS MATEMATICAS is intended as a medium of rapid publication for mathematics papers; it is devoted to the following kinds of material:

1. Theses and dissertations containing original results.
2. Expository papers on recently obtained results on a given subject or new treatments of classical topics.
3. Notes from graduate courses and seminars.
4. Collections of papers presented at meetings.

**Submission of Projects.**
A volume to be considered for publication may be submitted to any member of the editorial committee listed below. Only works in the following languages will be considered: Spanish, Portugese, French, English or German.
Volumes submitted must be at least 70 pages in length and must be carefully typed in A4 format (22 x 27,5 cms) with 4 cm. margins at the top and bottom and 3 cm. margins at the sides of each page.
Since manuscripts will be reduced to 17,5 x 24,5 cms. format it is recommended that they be double spaced.

# INTRODUCCION AL ANALISIS NO STANDARD Y A SUS APLICACIONES EN PROBABILIDAD

LEOPOLDO BERTOSSI L.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Casilla 114-D, Santiago

Bertossi

# NOTAS MATEMATICAS - N° 14

INTRODUCCION AL ANALISIS NO STANDARD Y A SUS APLICACIONES.

Leopoldo Bertossi D. *

* PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Casilla 114-D, Santiago

CONTENIDO

PAGINA

Estas notas contienen los temas expuestos en el curso "Análisis no Standard y Análisis Estocástico", dictado el Segundo Semestre de 1982, a cargo del autor de estas notas y del Prof. Rolando Rebolledo, como parte de las actividades del Grupo de Investigación en Probabilidades de nuestra Facultad de Matemáticas.

El contenido del curso estuvo basado en artículos recientemente publicados sobre el tema y debidos principalmente a P. Loeb, R.A. Anderson y J. Keisler.

Se espera que estas notas sirvan como material de consulta e inspiración para futuras investigaciones en la materia y que, a la vez, permitan un fácil acceso a los artículos originales.

L. Bertossi

## §1 ELEMENTOS DE ANALISIS NO STANDARD

En este capítulo introductorio aplicaremos el siguiente teorema de la Lógica matemática debido a K. Gödel:

TEOREMA: (Compacidad). Sea $T$ un conjunto de oraciones de la lógica de primer orden (sólo hay cuantificación sobre elementos del universo y no, p.e., sobre subconjuntos, relaciones, etc.), finitaria (oraciones con sólo un número finito de cuantificaciones, conjunciones, disyunciones). Si cada subconjunto finito de $T$ tiene un modelo, entonces $T$ tiene un modelo.

APLICACION: Construimos un lenguaje formal de primer orden finitario con el conjunto de símbolos
$S = \{\underset{\sim}{+}, \underset{\sim}{\cdot}, \underset{\sim}{\leq}, \underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{1}\}$.

Por ejemplo, una oración de este lenguaje es

$$\phi = \forall x (x \neq \underset{\sim}{0} \rightarrow \exists y (x \underset{\sim}{\cdot} y = \underset{\sim}{1}))$$

Si en la estructura $\mathcal{R} = < \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 >$ interpretamos los símbolos de $S$ en forma natural, entonces $\phi$ es satisfecha por $\mathcal{R}$; decimos también que $\mathcal{R}$ es un modelo de $\phi$ (esto se denota usualmente en la forma $\mathcal{R} \models \phi$). Obviamente $\mathcal{R}$ es modelo de todos los axiomas de cuerpo ordenado escritos con los símbolos de $S$.

Llamamos teoría de $\mathcal{R}$ al conjunto de todas las oraciones del lenguaje correspondiente a $S$ que tienen a $\mathcal{R}$ como modelo:

$$Th\ \mathcal{R} := \{\phi : \phi \text{ es oración y } \mathcal{R} \models \phi\}$$

Queremos ver si hay un cuerpo ordenado que satisfaga las mismas oraciones de primer orden que $\mathcal{R}$, pero que, además de contener esencialmente a $\mathcal{R}$, tenga elementos "infinitamente grandes" y elementos "infinitamente pequeños" (una extensión no standard). El hecho que este cuerpo satisfaga las mismas oraciones de primer orden que $\mathcal{R}$ permitirá operar con sus elementos como con los números reales, ya que, en particular, será modelo de los axiomas de cuerpo. Para verificar la existencia de un tal cuerpo, digamos $<{}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1>$, agregamos a nuestro conjunto de símbolos $S$ nuevos elementos: un $\underset{\sim}{r}$ por cada $r \in \mathbb{R}$ y un nuevo símbolo de constante $\underset{\sim}{C}$ (*i.e.* $r_1 \neq r_2 \Rightarrow \underset{\sim}{r_1} \neq \underset{\sim}{r_2}$ y $\underset{\sim}{C} \neq \underset{\sim}{r}$ para todo $r \in \mathbb{R}$). En $\mathcal{R}$ interpretamos los símbolos $\underset{\sim}{r}$ en forma natural: $\underset{\sim}{r}$ es interpretado como $r$. Para ser precisos, ahora tenemos la estructura

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \ < \mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1, (r)_{r \in \mathbb{R}} >$$ para interpretar los símbolos del nuevo conjunto de símbolos

$$S_{\mathbb{R}} = S \cup \{\underset{\sim}{r} : r \in \mathbb{R}\}$$

Como antes, podemos formar $Th\ \mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ y obviamente $\mathcal{R}_{\mathbb{R}} \models Th\ \mathcal{R}_{\mathbb{R}}$.

Consideramos ahora un conjunto $T$ de oraciones en el lenguaje correspondiente al conjunto de símbolos $S_{\mathbb{R}} \cup \{\underset{\sim}{C}\}$:

$$T := Th\ \mathcal{R}_{\mathbb{R}} \cup \{\underset{\sim}{0} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{r} \ : \ r > 0\}$$

Usando el teorema de compacidad podemos probar que $T$ tiene un modelo: cualquier subconjunto finito $T_0$ de $T$ está contenido en un conjunto de oraciones de la forma:

$$Th\ \mathfrak{R}_{\mathbb{R}} \cup \{\underset{\sim}{0} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{r_i} : r_i > 0 \ , i = 1, \ldots, n\},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Este último conjunto de oraciones tiene un modelo, por ejemplo, $<\mathbb{R}, +, <, \cdot\ , 0, 1, (r)_{r \in \mathbb{R}}, C_0>$ donde $C_0 \in \mathbb{R}$ es la interpretación de $\underset{\sim}{C}$ dada por

$$C_0 := \frac{1}{2} \ min\ \{r_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Así $T$ tiene un modelo, digamos

$$^*\mathfrak{R} = < {}^*\mathbb{R}\ , {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot\ , {}^*0, {}^*1, ({}^*r)_{r \in \mathbb{R}}, C>$$

(con $^*r$, $C \in {}^*\mathbb{R}$ y $C \ {}^*\!> {}^*0$)

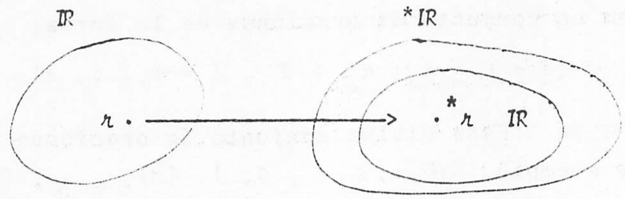
Como $^*\mathfrak{R} \models Th\ \mathfrak{R}$, en particular $^*\mathfrak{R}$ satisface los axiomas de cuerpo ordenado: $<{}^*\mathbb{R}\ , {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot\ , {}^*0, {}^*1>$ es un cuerpo ordenado.

$\mathfrak{R}$ está sumergido en $< {}^*\mathbb{R}\ , {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1 >$.

En efecto, basta hacer la inmersión

$r \in \mathbb{R} \longmapsto {}^*r \in {}^*\mathbb{R}$ y es fácil ver que las operaciones en $< {}^*\mathbb{R}\ , {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1 >$ son extensiones de las operaciones en $\mathfrak{R}$ y que la relación de orden $^*<$ en $^*\mathbb{R}$ es extensión de la relación de orden en $\mathbb{R}$:

Supongamos $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{R}_{\mathbb{R}} \models \underset{\sim}{a} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{b}$. Luego, $\underset{\sim}{a} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{b} \in Th\ \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$, pero $^*\mathfrak{R} \models Th\ \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$, entonces $^*\mathfrak{R} \models \underset{\sim}{a} \underset{\sim}{<} \underset{\sim}{b}$, es decir, $^*a\ {}^*\!< {}^*b$ en $^*\mathbb{R}$.




Identificamos en adelante $^*r$ con $r$.

Como $C \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, tenemos que $^*\mathbb{R}$ contiene propiamente a $\mathbb{R}$ : $\mathbb{R}$ es subcampo propio ordenado de $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*<, {}^*\cdot, {}^*0, {}^*1 \rangle$ (en adelante, si no hay confusión, omitiremos el asterisco, escribiendo simplemente $\langle {}^*\mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$).

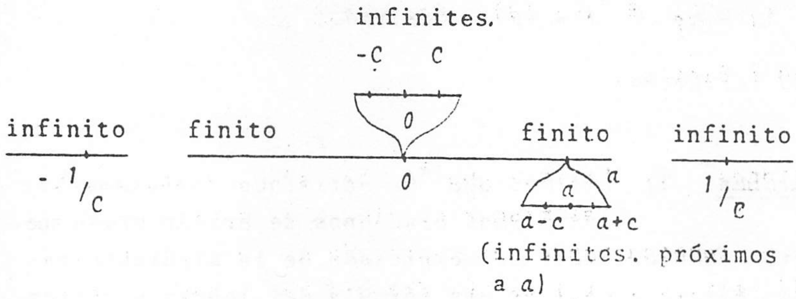
$^*\mathbb{R}$ tiene un elemento que es "infinitesimal", en el sentido que es menor que todo real positivo y no negativo. En efecto, en $\langle {}^*\mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 \rangle$ se tiene $0 < C < r$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$. También hay "infinitesimales" negativos (por ejemplo, $-C$) y números "infinitamente" grandes: $1/C > r$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Obviamente hay más infinitesimales: $\frac{C}{2}$, $2C$, etc.

## ALGUNAS PROPIEDADES DE LA EXTENSION NO STANDARD:

Trabajaremos ahora en la estructura

$$< {}^*\mathbb{R}, +, <, \cdot, 0, 1 > .$$

Dos elementos $a$ y $b$ en $^*\mathbb{R}$ que difieren en un infinitesimal se dicen <u>infinitesimalmente próximos</u> y escribimos $a \approx b$ (i.e. $a \approx b$ ssi $a - b$ es infinitesimal). Recordemos que $a$ es <u>infinitesimal</u> si $|a| < r$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Sabe mos ya que hay infinitesimales no nulos, entonces $^*\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$ es no vacío; $^*\mathbb{R}$ es extensión propia de $\mathbb{R}$. $a$ es <u>finito</u> si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < r$, $a$ es <u>infinito</u> si $|a| > r$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$




Todo número finito es infinitesimalmente cercano a un único número real (un elemento de $\mathbb{R}$ o standard) llamado su parte standard: si $a$ es finito, $st(a)$ (o $°a$) es el único $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \approx a$.

En efecto: i) Existencia:

Primer Caso: $a \in \mathbb{R}$, $st(a) := a$

Segundo Caso: $a \notin \mathbb{R}$, sea $M := \{r \in \mathbb{R} : r \leq a\}$

Como $a$ es finito, existe $r' \in \mathbb{R}$ tal que $a < r'$; entonces $M$ es acotado sup. en $\mathbb{R}$ => existe $r_0$ = sup. $M$ (en $\mathbb{R}$).
Afirmación: $a \approx r_0$ (dem. trivial).

ii) Unicidad:

Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ con $r_1 \neq r_2$ y $a \approx r_1$ y $a \approx r_2$, entonces $\underbrace{\underbrace{(r_1 - a)}_{\text{infinites.}} + \underbrace{(a - r_2)}_{\text{infinites.}}}_{\text{infinites.}}$

$= \underbrace{r_1 - r_2}_{\text{no infinites.}} \in \mathbb{R} - \{0\}$ Contrad.!

<u>Observaciones</u>: 1) Dijimos que $^*\mathcal{R}$ satisface (exactamente) las mismas oraciones de primer orden que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$. Esto también puede ser expresado de la siguiente manera: *Si* $\phi(x_1,\ldots, x_n)$ es una fórmula del lenguaje correspondiente a $S$ con variables libres $x_1,\ldots, x_n$; y $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{R} \models \phi\,[r_1,\ldots, r_n]$ ssi $^*\mathcal{R} \models \phi\,[\,^*r_1,\ldots,{}^*r_n\,]$ ($\phi$ no contiene a $\underset{\sim}{C}$).

Lo recién formulado se llama <u>principio de tranferencia</u>.

2) Puede ser útil tener en mente la siguiente observación: Hemos encontrado un cuerpo ordenado $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$ (omitimos la escritura $^*+$, $^*\cdot$, etc. cuando no hay peligro de confusión) que es una extensión propia de $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$ tal que ambos cuerpos satisfacen las mismas oraciones del lenguaje correspondiente al conjunto de símbolos $S = \{\underset{\sim}{+}, \underset{\sim}{\cdot}, \underset{\sim}{<}, \underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{0}\}$ (lenguaje de primer orden, finitario). De esto podemos deducir que el <u>axioma del supre-</u>

mo no puede ser escrito usando una oración de este lenguaje, es decir, la cuantificación sobre subconjuntos del universo que se usa para expresar el axioma es, podemos decir, inevitable (si se pudiera expresar el axioma, entonces $^*\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ serían isomorfos).

3) Decimos que $^*\mathcal{R}$ es una extensión no standard de $\mathcal{R}$.

## §2 UN MODELO NO STANDARD PARA LA SUPERESTRUCTURA COMPLETA DEL ANALISIS

Para desarrollar el análisis necesitamos considerar no sólo ciertos elementos distinguidos como el $0$ y el $1$ y las relaciones $+$, $\cdot$, $<$ ($+$ y $\cdot$ pueden ser vistas como relaciones), sino también otros objetos y estructuras: otras funciones, subconjuntos de $\mathbb{R}$, otras relaciones, productos cartesianos, topologías, espacios de medida, etc. Para considerar todos estos objetos en nuestro contexto general, formamos la superestructura completa de $\mathbb{R}$:

$$V_0(\mathbb{R}) := \mathbb{R}, \quad V_{n+1}(\mathbb{R}) := V_n(\mathbb{R}) \cup P(V_n(\mathbb{R})),$$

$$V(\mathbb{R}) := \bigcup_{\mathbb{N}} V_n(\mathbb{R}).$$

$V(\mathbb{R})$ es la superestructura completa de $\mathbb{R}$ y contiene como elementos todos los objetos antes nombrados. En particular, $\mathbb{R} \in V(\mathbb{R})$, $\mathbb{N} \in V(\mathbb{R})$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V(\mathbb{R})$ para cualquier sucesión de números reales, $r \in V(\mathbb{R})$ para cualquier número real $r$, $Q \in V(\mathbb{R})$ para cualquier relación en $n$ argumentos $Q$ sobre $\mathbb{R}$, etc. Para verificar esto basta tener en cuenta la definición usual de par ordenado:

$$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

y para $n$-tuplos la definición inductiva:

$$(a) = a, (a_1,\ldots, a_n) = ((a_1,\ldots,a_{n-1}), a_n).$$

Además, $V_n(\mathbb{R}) \in V(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como en §1, se puede probar que existe una extensión no standard de $V(\mathbb{R})$ cuando consideramos un lenguaje con fórmulas de un cierto tipo:

Una <u>fórmula acotada</u> es una fórmula de primer orden, finitaria cuyos cuantificadores están acotados, i.e. aparecen en la forma $(\forall x \in y)$, $(\exists x \in y)$, más precisamente, las fórmulas están formadas sobre la base de las relaciones $u = v, u \in v$, los conectivos lógicos "$y$", "$o$", "$no$" y cuantificadores acotados. Por ejemplo, $(\forall x \in y)(\exists z \in y)(x \neq z)$ es una fórmula de nuestro lenguaje formal, aquí $y$ aparece como variable libre (no está bajo el alcance de un cuantificador).

Debería estar claro que basta tomar sólo "$\in$" (pertenencia) y "$=$" (igualdad) como relaciones primitivas y fórmulas acotadas para, una vez que se ha dado una interpretación a las variables libres, expresar proposiciones sobre los números reales, conjuntos de números, relaciones entre números, relaciones entre conjuntos y números, etc. Por ejemplo

$$(\forall x \in u)(\forall y \in u)((x,y) \in \omega)$$

no es estrictamente fórmula del lenguaje formal. Sin embargo, recordando que $(x,y) := \{\{x\}, \{x,y\}\}$, podemos reducir esta "fórmula" a una que contiene sólo cuantificadores acotados, $\in$ y $=$. Para abreviar, escribimos, sin embargo, $(\forall x \in u)(\forall y \in u)((x,y) \in \omega)$.

Como otro ejemplo, consideremos la fórmula

$$\phi(u,\omega) = (\forall x \in u)(\forall y \in u)(\forall z \in u)((x,y,z) \in \omega \rightarrow (y,x,z) \in \omega)$$

las variables libres aparecen indicadas a la izquierda, entonces $\phi(u,\omega)$ es válida en $V(\mathbb{R})$ interpretando $u$ como $\mathbb{R}$ y $\omega$ como la relación suma $S$ definida en $V(\mathbb{R})$ mediante $(a,b,c) \in S \iff a,b,c \in \mathbb{R}$ y $a + b = c$, ya que la suma de reales es conmutativa en $V(\mathbb{R})$ (notar que $\mathbb{R}$ y $S \in V(\mathbb{R})$). En símbolos:

$$V(\mathbb{R}) \models \phi(u,\omega)\ [\mathbb{R}, S]$$

y esto quiere decir que "$\phi(u,\omega)$ es verdadera en $V(\mathbb{R})$ interpretando $u$ como $\mathbb{R}$ y $\omega$ como $S$". Si no hay peligro de confusión, escribimos simplemente:

$$V(\mathbb{R}) \models \phi\ [\mathbb{R}, S].$$

Tenemos, entonces, el siguiente teorema que puede ser demostrado usando argumentos de compacidad más generales.

<u>TEOREMA</u>: Hay un conjunto $^*\mathbb{R}$ y una aplicación $^* : V(\mathbb{R}) \rightarrow V(^*\mathbb{R})$ tal que:

i) $^*\mathbb{R}$ es campo ordenado que extiende propiamente a $\mathbb{R}$.

ii) $^*$ es la identidad en $\mathbb{R}$

iii) $^*$ preserva la validez de fórmulas acotadas, en forma más precisa, cada fórmula $P(v_1, \ldots, v_n)$ (de la forma convenida) que es verdadera en $V(\mathbb{R})$ con $S_1, \ldots, S_n \in V(\mathbb{R})$

también es verdadera en $V(*\mathbb{R})$ con $*S_1,\dots *S_n (\in V(*\mathbb{R}))$, en símbolos:

$$V(\mathbb{R}) \models P[S_1,\dots S_n] \iff$$
$$V(*\mathbb{R}) \models P[*S_1,\dots *S_n]$$

iv) Para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ y cualquier cadena decreciente $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots$ de conjuntos no vacíos, $X_m \in *(V_n(\mathbb{R}))$, $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} X_m \neq \phi$.

Observaciones: 1) Tal como formamos la superestructura completa $V(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ se puede formar la superestructura $V(*\mathbb{R})$ de $*\mathbb{R}$ que es la mencionada en el teorema.

2) Una demostración del teorema que no usa directamente un teorema de compacidad y que es "más o menos constructiva" (usa el axioma de elección) puede ser encontrada, por ejemplo, en "Foundations of Infinitesimal Calculus" de J. Keisler p. 31, (Prindle, Weber of Schmidt, Inc. 1976).

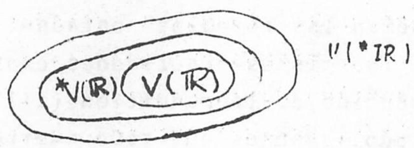
3) La propiedad (iii) se llama usualmente "principio de transferencia"; la propiedad (iv) se llama usualmente "principio de saturacion". Este último principio no siempre es requerido, pero es necesario para nuestros propósitos. Hay formulaciones equivalentes del principio de saturación que indicaremos más adelante y que a veces son más manejables.

Definición: $^*[V(\mathbb{R})] := \bigcup_{n\in \mathbb{N}} {}^*[V_n(\mathbb{R})]$.

Los objetos de $^*[V(\mathbb{R})]$ se llaman objetos internos.

Observaciones: 1) Como $V_n(\mathbb{R}) \in V(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, cada uno de éstos tiene su imagen $^*[V_n(\mathbb{R})]$ bajo $*$. Notar que no existe la imagen de $V(\mathbb{R})$ bajo$*$, ya que $* : V(\mathbb{R}) \to V(^*\mathbb{R})$, por lo tanto, la de arriba es una auténtica definición.

2) Se tiene $\{^*a : a\in V(\mathbb{R})\} \equiv V(\mathbb{R}) \subsetneq {}^*[V(\mathbb{R})] \subsetneq V(^*\mathbb{R})$ como veremos pronto. Los objetos internos de $V(^*\mathbb{R})$ son aquellos que nos interesan especialmente por sus "buenas propiedades". Los objetos en $V(\mathbb{R})$ se llaman objetos standard y los de $V(^*\mathbb{R}) \setminus {}^*[V(\mathbb{R})]$, objetos externos.




Ejemplo: Como $\mathbb{N} \in V(\mathbb{R})$ (de hecho a $V_1(\mathbb{R})$), $\mathbb{N}$ tiene su imagen $^*\mathbb{N}$ bajo$*$ en $V(^*\mathbb{R})$. Como $\mathbb{N}$ es una relación en $V(\mathbb{R})$, $^*\mathbb{N}$ es una extensión de esta relación; tenemos entonces $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$, y se puede probar fácilmente que $\mathbb{N}$ es segmento inicial de $^*\mathbb{N}$. En $V(^*\mathbb{R})$ trabajamos con $^*\mathbb{N}$ en lugar de $\mathbb{N}$, en general. Notemos que $\mathbb{N}\in V(^*\mathbb{R})$ también (ya que $n \in V(^*\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$). $^*\mathbb{N}$ es el conjunto de los hiperenteros no negativos. Como en $V(\mathbb{R})$ es válida la proposición $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})(y > x)$ (notar que es fórmula acotada), tenemos que en $V(^*\mathbb{R})$ es válida la proporción $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\exists y \in {}^*\mathbb{N})(y \,{}^*\!> x)$. Si llamamos hiperreales a los eltos. de $^*\mathbb{R}$, entonces tenemos que para cada número hiperreal existe un hiperentero que es mayor que él. Como en §1, se demuestra que $^*>$, es una extensión de la relación $>$ en $V(\mathbb{R})$. En general, si $\rho \in V(\mathbb{R})$ es una relación, entonces $^*\rho \in V(^*\mathbb{R})$ es una extensión de $\mathcal{Q}$. En particular, cada función $f \in V(\mathbb{R})$ tiene una extensión $*f$ en $V(*\mathbb{R})$.

Continuando con nuestro ejemplo, podemos demostrar que $*\mathbb{N}$ es un objeto interno: $V(\mathbb{R}) \models (u \in v)[\mathbb{N}, V_1(\mathbb{R})]$ (i.e. en $V(\mathbb{R})$ es válido que $\mathbb{N} \in V_1(\mathbb{R})$), entonces, por el principio de transferencia, se tiene

$$V(*\mathbb{R}) \models (u \in v)[*\mathbb{N}, *[V_1(\mathbb{R})]]$$

ó $*\mathbb{N} \in *[V_1(\mathbb{R})]$, pero $*[V_1(\mathbb{R})] \subseteq *[V(\mathbb{R})]$

$\therefore$ $*\mathbb{N} \in *[V(\mathbb{R})]$, o sea, es interno.

Observaciones: 1) La siguiente discusión nos mostrará la importancia de los objetos internos y del papel que desempeñan las fórmulas acotadas: Por un lado, $V(\mathbb{R})$ y $V(*\mathbb{R})$ tienen las mismas propiedades expresables a través de fórmulas en el sentido de la condición (iii) del teorema anterior; por otro lado, sabemos que todo cuerpo ordenado completo es isomorfo al de los números reales standard y, por lo tanto, no puede ser una extensión propia de este último, ¿significa esto que el axioma de completitud no es expresable en nuestro lenguaje?, o bien, nos preguntamos ¿si es formulable, qué expresa al ser interpretado en $V(*\mathbb{R})$?

El axioma es formulable mediante

$(\forall x \in V_1(\mathbb{R}))$ $(x \notin \mathbb{R} \wedge$ "x es acotado superiormente" $\rightarrow$ "x tiene un supremo") (obviamente "x es acotado sup." y "x tiene un supremo" pueden ser expresados en nuestro lenguaje), más precisamente tenemos:

$$V(\mathbb{R}) \models (\forall x \in u)\,(x \notin v \wedge \text{"x acotado sup"}.$$

$$\to \text{"x tiene un supremo"})\,[\,V_1(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\,]\,;$$

por el principio de transferencia queda

$$V(^*\mathbb{R}) \models (\forall x \in u)\,(x \notin v \wedge \text{"x...})\,[\,^*[\,V_1(\mathbb{R})\,],{}^*\mathbb{R}\,],$$

es decir, en $V(^*\mathbb{R})$:

$$(\forall x \in {}^*[\,V_1(\mathbb{R})\,])\,(x \in {}^*\mathbb{R} \wedge \text{"x acotado sup"} \to$$

"x tiene un supremo") (obviamente aparece la relación $^*<$ en lugar de $\leq$ donde corresponda). En otros términos, todo subconjunto de $^*\mathbb{R}$ que está en $^*[\,V_1(\mathbb{R})\,]$ y que es acotado superiormente tiene supremo. Pero los subconjuntos de $^*\mathbb{R}$ que están en $^*[\,V_1(\mathbb{R})\,]$ son precisamente los subconjuntos internos de $^*\mathbb{R}$, entonces, el axioma del supremo en $V(^*\mathbb{R})$ dice lo siguiente:

"Todo subconjunto <u>interno</u> de $^*\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo".

La palabra interno no puede ser omitida porque, como veremos luego, hay subconjuntos de $^*\mathbb{R}$ que no son internos.

2) Del mismo modo se puede demostrar que en $V(^*\mathbb{R})$: "Todo subconjunto <u>interno</u> no vacío de $^*\mathbb{N}$ tiene un elemento minimal".

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{N}$ es externo (en $V(^*\mathbb{R})$). En efecto, supongamos que $\mathbb{N}$ es interno, entonces podemos demostrar que $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es también interno:

$$\phi = (\forall x \in V_1(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R})(\forall y \in V_1(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R})$$

$(y \setminus x \in V_1(\mathbb{R}))$ es verdadera en $V(\mathbb{R})$

(la diferencia de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$), luego, es verdadera en $V(^*\mathbb{R})$ en la forma:

$$^*\phi = (\forall x \in {}^*[V_1(\mathbb{R})] \setminus {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*[V_1(\mathbb{R})] \setminus {}^*\mathbb{R})$$

$$(y \setminus x \in {}^*[V_1(\mathbb{R})])$$

Tomando $x = {}^*\mathbb{N}$ (sabemos que es interno)

$y = \mathbb{N}$ (suponemos que es interno), queda

$^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \in {}^*[V_1(\mathbb{R})]$, entonces $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es interno. Además, $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es no vacío (hay enteros infinitos), luego, por (2) de la observación anterior, $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tiene un primer elemento $\omega$. Como $\omega - 1 \in \mathbb{N}$, $(\omega-1) + 1 = \omega \in \mathbb{N}$. Contradicción!

Observación: Ya nos podemos dar cuenta de la importancia que pueda tener el saber reconocer los objetos internos. Para esto hay algunos criterios y teoremas útiles que citamos a continuación:

Proposiciones: 1) Un objeto $a \in V(^*\mathbb{R})$ se llama standard ssi $a = {}^*b$ para algún $b \in V(\mathbb{R})$. Todo objeto standard es interno. En efecto, sup. $a$ es standard, entonces $a = {}^*b$ con $b \in V(\mathbb{R})$, entonces $V(\mathbb{R}) \models b \in V_n(\mathbb{R})$ (para algún $n$ fijo), luego $V(^*\mathbb{R}) \models {}^*b \in {}^*[V_n(\mathbb{R})]$. Así $a = {}^*b \in {}^*[V(\mathbb{R})]$.

2) Los elementos de un objeto interno son internos.

3) Un objeto $C$ es interno ssi es elemento de un objeto standard. En efecto, si $C$ es interno, entonces $C \in \bigcup_{IN} {}^*[V_n(IR)] \Rightarrow C \in {}^*[V_n(IR)]$ para algún n. Tomar $b = V_n(IR)$ $(\in V(IR))$, entonces $C \in {}^*b$. Recíprocamente, si $C$ es elemento de un objeto standard $b$, entonces $C$ es elemento de un objeto interno, a saber, $b$ (por (1)). Por (2), tenemos que $C$ es interno.

4) La unión de los elementos de un objeto interno es objeto interno.

5) El conjunto de todos los objetos internos que son subconjuntos de un objeto interno es un objeto interno.

6) El dominio y el rango de cualquier relación binaria interna son internos.

7) La imagen de un objeto interno bajo una relación binaria interna es interna.

8) (<u>Criterio de definición interna</u>). Sea $\phi(v_1,\ldots v_n, u)$ una fórmula acotada con variables libres $v_1,\ldots v_n, u$ . Sean $a_1\ldots, a_n$ objetos internos, entonces el conjunto $\{b \in a_1 : \phi[a_1,\ldots a_n,b]$ es verdadera en $V({}^*IR)\}$ es un objeto interno.

Dem. Para algún $m \in \mathbb{N}$, todos los $a_i$ pertenecen a $*[V_m(\mathbb{R})]$. Por otra parte,

$$V(\mathbb{R}) \models (\forall y_1,\ldots, y_n \in V_m(\mathbb{R}))(\exists u \in V_{m+1}(\mathbb{R}))$$
$$(u = \{x \in y_1 : \phi(y_1,\ldots y_n, x)\})$$

Por el principio de transferencia,

$$V(*\mathbb{R}) \models (\forall y_1,\ldots,y_n \in *[V_m(\mathbb{R})])(\exists u * \in [V_{m+1}(\mathbb{R})])$$
$$(u = \{x \in y_1 : \phi(y_1,\ldots. y_n, x)\})$$

Tomar $y_i = a_i \in *[V_m(\mathbb{R})]$, entonces el $u$ de arriba es precisamente el conjunto en la tesis y, además, es interno ($\in *[V_{m+1}(\mathbb{R})]$).

<u>Observación:</u> Tal como anunciamos, damos ahora algunas formulaciones equivalentes del principio de saturación:

1) Para toda sucesión de objetos internos en $V(*\mathbb{R})$, digamos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe una sucesión <u>interna</u> $(b_n)_{n\in *\mathbb{N}}$ de objetos en $V(*\mathbb{R})$ tal que $b_n = a_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

2) Previamente damos una definición:
Una relación binaria R en $V(*\mathbb{R})$ es concurrente en un conjunto A si siempre que $x_1,\ldots, x_n \in A \cap \mathrm{dom}(R)$ $(n \in \mathbb{N})$, hay un $y \in \mathrm{rg}(R)$ tal que $(x_i, y) \in R$; $i = 1,\ldots n$; esto para cada $n$.
Tenemos, entonces:

$V(*\mathbb{R})$ es saturada ssi siempre que una relación <u>interna</u> binaria R es concurrente en un conjunto A a lo sumo enumerable, entonces $R$ es satisfecha en $A$ (i.e. hay un $y \in rg(R)$ tal que $(x,y) \in R$ para todo $x \in A$).

<u>Ejemplo</u>: $R$ definida mediante

$$(x,y) \in R : \iff 0 < y < x \quad y \quad x,y \in {}^*\mathbb{R}$$

$R$ es relación binaria interna, además, $R$ es concurrente en $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. $R$ es satisfecha en $A$, por ejemplo, $(\frac{1}{n}, c) \in R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si $c$ es infinitesimal positivo.

<u>Observación</u>: Indicamos ahora algunas consecuencias del principio de saturación:

1) Todo conjunto interno es finito o no enumerable.

2) Todo conjunto enumerable de hiperenteros infinitos (i.e. de elementos de ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$) tiene una cota inferior infinita en ${}^*\mathbb{N}$.

3) Todo conjunto enumerable de infinitesimales positivos tiene una cota superior infinitesimal en ${}^*\mathbb{R}$.

<u>Proposición</u>: Sea $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ un hiperentero positivo, entonces $\{K \in {}^*\mathbb{N} : K < H\}$ es interno.

Dem. Basta usar el criterio de definición interna con $\phi(u,v,w) = w < v$, entonces:

$$\{K \in {}^*\mathbb{N} : V({}^*\mathbb{R}) \models \phi[{}^*\mathbb{N}, H, K]\}$$

es interno (por ser ${}^*\mathbb{N}$ interno, $H$ interno (es elemento de un objeto interno) y $<$ relación interna).

Definición: Un conjunto $X$ interno se llama hiperfinito si hay $H \in {}^*\mathbb{N}$ y una biyección interna $f: \{K \in {}^*\mathbb{N} : K < H\} \to X$. $H$ se llama la cardinalidad interna de $X$: $H = |X|$. Si $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ decimos que $X$ es * finito.

Observaciones: 1) Se puede demostrar que todo conjunto *finito de objetos internos es interno. Como consecuencia: Si $A$ y $B$ son internos, $(A,B)$ también.

2) Si $X$ es *finito, entonces su cardinalidad (externa) es infinita no enumerable (esto es consecuencia de la saturación).

## §3 EL ESPACIO DE PROBABILIDAD DE LOEB

Proposición: Sea $A$ conjunto interno. La familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos internos de $A$ es interna y es un álgebra de subconjuntos, es decir, $A \in \mathcal{A}$; $B_1$ y $B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}$; $A - B \in \mathcal{A}$ si $B \in \mathcal{A}$. Más aún, una unión *finita de eltos. de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Dm. Ya sabemos que $\mathcal{A}$ es interna. Como $A$ es interno, $A \in \mathcal{A}$. Sean ahora $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, tenemos $B_1 \cup B_2 = \{x \in A : x \in B_1 \vee x \in B_2\}$, por el criterio de definición interna, $B_1 \cup B_2$ es interno, luego, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}$. Ahora $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ por el mismo motivo $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Sea $\{B_1,\ldots B_{n_\omega}\} \subset \mathcal{A}$, $\omega \in {}^*IN$, familia *finita de subconjuntos internos de A, entonces $\bigcup_{n=1}^{\omega} B_n \in \mathcal{A}$:

$$\bigcup_{n=1}^{\omega} B_n = \{x \in A : \exists n \in {}^*\mathbb{N}\ (1 \leq n \leq \omega \wedge x \in B_n)\},$$

por el criterio de definición interna, $\bigcup_{n=1}^{\omega} B_n$ es interno, luego pertenene a $\mathcal{A}$ .

Observación: 1) Notar que no podemos concluir que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ para $(B_n)_{n \in IN}$ sucesión de eltos. de $\mathcal{A}$ (se podría pensar en tomar $B_n = \phi$ para $n \in {}^*IN \setminus IN$, $n \leq \omega$, pero no se puede demostrar que $(B_n)_{n=1}^{\omega}$ es *finita).

2) Los conjuntos hiperfinitos son herramientas poderosas por dos razones: (a) por el principio de transferencia, cualquier proposición elemental que es válida para todos los conjuntos finitos, es válida también para todos los conjuntos hiperfinitos, y así podemos aplicar argumentos de conteo en conjuntos hiperfinitos. (b) estructuras standard infinitas pueden ser aproximadas mediante estructuras *finitas.

Observación: Dado un conjunto hiperfinito $X \subseteq {}^*IR$ podemos formar la suma $\sum_{a \in X} a$ y máx $\{a : a \in X\}$, etc., ya que la sumatoria como operación sobre subconjuntos finitos de IR está definida (y está) en $V(IR)$, por el principio de transferencia su existencia y propiedades se transfieren a $V({}^*IR)$ cuando trabajamos con conjuntos hiperfinitos.

<u>Definición</u>: Sea $Y$ conjunto interno,

$$^*P(Y) := \{B : B \subseteq Y, B \text{ interno}\}.$$

<u>Observación</u>: 1) Ya sabemos que $^*P(Y)$ es interno.

2) La de arriba es efectivamente una definición, ya que $P(Y) \in V(^*\mathbb{R})$ y, por lo tanto, no tiene imagen bajo $*$.

<u>Definición</u>: Un <u>espacio de probabilidades hiperfinito</u> es un par $(A, \mu)$ donde $A$ es un conjunto hiperfinito no vacío y $\mu$ es una función interna $\mu : A \to {}^*[0,1]$ tal que $\sum_{a\in A} \mu(a) = 1$.

Si $B \in {}^*P(A)$, definimos $\mu(B) := \sum_{a\in B} \mu(a)$.

<u>Observación</u>: 1) Si tenemos, entonces, un espacio de probabilidades hiperfinito $(A,\mu)$ y $\mu$ definida para eltos. de $^*P(A)$ como arriba, decimos que $\mu$ es una <u>medida de probabilidad interna sobre A</u>.

2) En forma similar a aquella en que estudiamos el álgebra de subconjuntos internos de un conjunto interno, podemos probar que $\mu$ es una medida de probabilidad finitamente aditiva, más aún, que es *finitamente aditiva. Este tipo de demostraciones también puede ser abordado mediante el <u>principio de inducción interna</u> que dice:

Si $S \subseteq {}^*\mathbb{N}$, $S$ <u>interno</u>, $0 \in S$ y $n \in S$ $\Rightarrow n + 1 \in S$, entonces $S = {}^*\mathbb{N}$.

Definición: Sea $A$ hiperfinito. $B(A) := \sigma$-álgebra sobre $A$ generada por los subconjuntos internos de $A$ (en el sentido usual), es decir, $B(A) = \sigma({}^*P(A))$. Los eltos. de $B(A)$ se llaman subconjuntos de Borel de $A$.

Observación: ${}^*P(A)$ contiene, por definición, sólo subconjuntos internos de $A$, sin embargo, si $A$ es infinito, entonces $B(A)$ contiene también subconjuntos externos de $A$ (pensar en que un conjunto interno $A$ es finito o infinito no enumerable y en que todos sus elementos son internos). Por este motivo $\mu$ no necesariamente está definida para todo conjunto de Borel.

Proposición: Sea $X$ conjunto interno en $V({}^*\mathbb{R})$, y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos de ${}^*P(X)$, es decir, de subconjuntos internos de $X$, tal que $A_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces para algún $m \in \mathbb{N}$, $A_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_n$.

Dem. Por el principio de saturación, hay una extensión interna $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ver pág.16). El conjunto $\{m \in {}^*\mathbb{N} : A_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_n\}$ es interno, ya que está definido en términos de parámetros internos (${}^*\mathbb{N}$, $m$, la suc. $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$) y usamos el criterio de definición interna. Este conjunto es no vacío, entonces tiene un primer elemento. Además, este primer elemento debe ser finito porque este conjunto contiene todos los enteros infinitos, pero no puede ser igual a ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ porque este último es externo.

Corolario: Si $(B_n)_{1 \leq n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de ${}^*P(X)$ no vacíos, disjuntos, entonces $\bigcup_{\mathbb{N}} B_n \notin {}^*P(X)$

<u>Dem</u>. Sea $B_0 := \bigcup\limits_{IN} B_n$. Supongamos que $B_0$ es interno (i.e. $\in {}^*P(X)$), entonces la sucesión $(B_n)_{0\leq n \in IN}$ es una sucesión de eltos. en ${}^*P(X)$ y, además, $B_0 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces, por la proposición anterior, $B_0 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{m} B_n$ para algún $m$ finito. Contradicción!

<u>Observaciones</u>: 1) El corolario anterior dice que una unión numerable $B$ de subconjuntos internos, no vacíos, de un conjunto interno $A$ no es subconjunto interno de $A$, es decir, no está en ${}^*P(A)$ y, en consecuencia no está definida $\mu(B)$ si estamos trabajando en un espacio de probabilidades hiperfinito $(A,\mu)$. Sin embargo, $B \in \mathcal{B}(A)$, el $\sigma$-álgebra generada por ${}^*P(A)$. Uniones numerables (sobre $IN$) de eltos. de $\mathcal{B}(A)$ están en $\mathcal{B}(A)$.

2) Sea $A$ conjunto interno y sea $\mu$ una probabilidad interna sobre el álgebra ${}^*P(A)$ que es finitamente aditiva (este es el caso de un espacio de probabilidades hiperfinito $(A,\mu)$), es decir, $\mu(\phi) = 0$ y $\mu(B_1 \dot{\cup} B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$ para $B_1, B_2 \in {}^*P(A)$ y $\mu: {}^*P(A) \to {}^*[0,1]$. Sea $\nu$ definida en ${}^*P(A)$ mediante: $\nu(B) := {}^\circ(\mu(B))$ para $B \in {}^*P(A)$ (también escribimos $\nu = {}^\circ\mu$), entonces $\nu$ es finitamente aditiva y $\nu: {}^*P(A) \to [0,1]$.

<u>Teorema</u>: La medida de probabilidad finitamente aditiva $\nu$ sobre ${}^*P(A)$ tiene una única extensión $\sigma$-aditiva, también denotada por $\nu$, definida sobre $\mathcal{B}(A)$.

<u>Dem</u>. Por la proposición anterior, una unión infinita enumerable de conjuntos no vacíos, disjuntos en ${}^*P(A)$ no es elemento de ${}^*P(A)$. Entonces $\nu$ es $\sigma$-aditiva en el álgebra ${}^*P(A)$, tenemos entonces una medida de probabilidad en el álgebra ${}^*P(A)$.

Por el teorema de extensión de Caratheodory hay una única medida de probabilidad $\overline{\nu}$ que extiende $\nu$ a $B(A)$.

<u>Observaciones</u>: 1) Siguiendo la demostración de teorema de Caratheodory, vemos que la extensión $\overline{\nu}$ a $B(A)$ es la restricción de la medida exterior $\nu^*$ generada por $\nu$ a $B(A)$, entonces para $B \in B(A)$: $\overline{\nu}(B) = \nu^*(B) = \inf\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(A_i) : (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sucesión de eltos. de $^*P(A)$ tal que $B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$.

2) Basándose en (1), Loeb demuestra que para cada $B \in B(A)$:

$$\nu(B) = \inf_{\substack{C \in {}^*P(A) \\ B \subseteq C}} \nu(C) = \sup_{\substack{C \in {}^*P(A) \\ C \subseteq B}} \nu(C)$$ y que hay un $D \in {}^*P(A)$ tal que

$$\nu((B \setminus D) \cup (D \setminus B)) = 0$$

3) Un conjunto $D \subseteq A$ es $\nu$-medible si hay conjuntos de Borel $B, C \in B(A)$ tales que $B \Delta D \subseteq C$ y $\nu(C) = 0$.

<u>Definición</u>: El espacio de probabilidad de Loeb asociado al espacio $(A,\mu)$ es $(A, L(A), \nu)$ donde $L(A)$ := completación de $B(A)$ con resp. a $\nu$ (= familia de conjuntos $\nu$-medibles), y $\nu$ es la medida de probabilidad generada por la parte standard de $\mu$ según el teorema anterior. También se escribe $(A, L(A), L(\mu))$, el espacio de Loeb asociado.

<u>Observaciones</u>: 1) El espacio de probabilidad de Loeb asociado a un espacio de probabilidad interno $(A,\mu)$ es un espacio de probabilidad standard (en el sentido de ordinario o clásico).

2) Por lo expuesto anteriormente podría pensarse que la construcción del espacio de Loeb sólo es posible cuando se considera como punto de partida en espacio de probabilidades hiperfinito. En realidad, el teorema de Loeb puede ser enunciado en términos generales en la siguiente forma:

Si $X$ es un conjunto interno, $\mathcal{A}$ es un álgebra interna sobre $X$, $\nu$ es una palicación interna de $\mathcal{A}$ en $^*[0,1]$, finitamente aditiva; y $\nu_0 : \to [0,1]$ está definida mediante $\nu_0(A) = {}^\circ(\nu(A))$ y finalmente $\sigma(\mathcal{A})$ es el $\sigma$-álgebra (ordinario) generado por $\mathcal{A}$, entonces la medida finitamente aditiva $\nu_0$ sobre $\mathcal{A}$ tiene una única extensión, también denotada por $\nu_0$, a todo $\sigma(\mathcal{A})$.

Las observaciones de la pág. 23 también son válidas, mutatis mutandis, en esta formulación.

<u>Ejemplo</u>: (lanzamiento de una moneda)

Elijamos $\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. $X = \{0,1\}^\omega$, el conjunto de las $\omega$-tuplas internas. La cardinalidad interna de $X$ es $|X| = 2^\omega \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

$\mathcal{A}$ = fam. de subconjuntos internos de $X$.

Para $A \in \mathcal{A}$, sea $\mu(A) = \dfrac{|A|}{2^\omega}$. Entonces $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es el espacio de probabilidades interno del experimento hiperfinito de lanzar una moneda homogénea $\omega$ veces. Sea $(x, L(x), \nu)$ el espacio standard de probabilidades de Loeb asociado a $(x, \mathcal{A}, \mu)$ <u>que puede ser usado como espacio básico para infinitos lanzamientos de una moneda.</u>

Consideremos, por ejemplo, el evento interno $A_n$: "los $(n-1)$ primeros lanzamientos son sello y el n-ésimo es cara". Si $\omega$ es par, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\omega/2} A_{2n} \in \mathcal{A}$ es el evento interno "obtener cara por primera vez en un lanzamiento de orden par en $\omega$ tiradas.

$$\text{Se tiene } \mu(A) = \sum_{n=1}^{\omega/2} \frac{2^{\omega-2n}}{2^{\omega}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\omega/2} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{\omega}}$$

Como $\nu = {}^{\circ}\mu$ tenemos $\nu(A) = \frac{1}{3}$.

¿Qué pasa cuando queremos trabajar con eventos "standard"?, ¿Hay coincidencia?. El evento standard $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n} \in L(X)$, ya que $L(X)$ es el menor $\sigma$-álgebra sobre $X$ que contiene a $\mathcal{A}$ (todos los eventos "standard" asociados con infinitos lanzamientos de una moneda están entonces en $L(X)$.

Obviamente $\nu(B) = \frac{1}{3}$:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_{2n}\right) = \sum_{1}^{k} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\therefore \nu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_{2n}\right) = {}^{\circ}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_{2n}\right)$$

$$= \sum_{1}^{k} \frac{1}{2^{2n}} \to \frac{1}{3}$$

$$\therefore \nu(B) = \nu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_{2n}\right) = \lim_{k\to\infty} \nu\left(\bigcup_{1}^{k} A_{2n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Al trabajar con eventos del tipo $B$ se puede usar $(X, L(X), \nu)$ como un modelo "standard" para el lanzamiento de la moneda infinitas veces.

ver original de Loeb o Cutland



Proposición: $\Omega$ conjunto interno, si $X:\Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es ${}^*P(\Omega)$-medible, entonces ${}^\circ X:\Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es $B(\Omega)$ medible.

Dem. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega \in \Omega : {}^\circ X(\omega) < \alpha\} = \bigcup_{n=1, n\in\mathbb{N}}^{\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < \alpha - \frac{1}{n}\} \in B(\Omega),$$

ya que cada $\{\omega < \alpha - \frac{1}{n}\} \in {}^*P(\Omega)$ por ser $X$ ${}^*P(\Omega)$-medible.

Nos interesa el caso $(\Omega,\mu)$ espacio de probabilidades hiperfinito. En adelante denotaremos con $P$ la medida de Loeb sobre $\Omega$.

Definición: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $F: \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, $F$ es un levantamiento de $f$ si $F$ es interna y ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$ P.c.s.

Proposición: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ es Loeb-medible (i.e. para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\} \in L(\Omega)$) ssi tiene un levantamiento.

Dem. " <= " Sea $F: \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ un levantamiento de $f$. $F$ interna.
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, entonces $\{\omega \in \Omega : F(\omega) < \alpha\} \in {}^*P(\Omega)$, ya que $F$ es interna, entonces $F$ es ${}^*P(\Omega)$-medible. Luego, ${}^\circ F = f$ es $B(\Omega)$-medible.

" => " : será demostrada en una proposición más general que presentaremos después.

Observaciones: 1) Más que el caso $(\Omega,\mu)$, espacio de probabilidades hiperfinito, nos interesa el caso particular en que $\mu$ es la medida de conteo $\mu(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$, $B \in {}^*P(\Omega)$. Como siempre, $P$ será la medida de Loeb asociada.

2) Dado $\Omega$ hiperfinito y una función interna $F : \Omega \to {}^*I\!R$, podemos formar siempre la suma $\sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)$. Definimos

$\overline{E}(F) := \sum_{\omega\in\Omega} F(\omega) \cdot \frac{1}{|\Omega|}$ valor esperado de $F$. También escribimos $\int_\Omega F\, d\mu$. Para cada $B \in {}^*P(\Omega)$, $B \neq \phi$ :

$\overline{E}\,(F|B) := \sum_{\omega\in B} F(\omega) \cdot \frac{1}{|B|}$, esperanza condicional.

Definición: 1) $F : \Omega \to {}^*I\!R$ no negativa se dice S-integrable si:

i) $F$ es interna

ii) $\overline{E}(F)$ es finito, i.e. existe $t \in I\!R$, tal que $|\overline{E}\,(F)| < t$,

iii) ${}^\circ\overline{E}(F) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ\overline{E}\,(F \wedge n)$.

2) $F : \Omega \to {}^*I\!R$ se dice S-integrable si a la vez $F^+ := \max\{F, 0\}$ y $F^- := \min\{F, 0\}$ son S-integrables.

Definición: $F : \Omega \to {}^*I\!R$ se dice S-acotada si hay un $n \in I\!N$ que es una cota superior para $|F(\omega)|$ .

Observación: Toda función interna S-acotada es S-integrable: En efecto, basta considerar $F$ no negativa.

Sup. $F(\omega) < n$ ,

$$\overline{E}(F) = \sum_{\omega\in\Omega} F(\omega) \frac{1}{|\Omega|} \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} \frac{n}{|\Omega|}$$

$$= n \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{|\Omega|} = n ,$$

ahora, $\lim\limits_{m\to\infty} {}^\circ\overline{E}\,(F \wedge m) = \lim\limits_{m\to\infty} {}^\circ(\sum\limits_{\omega\in\Omega} (F_{(\omega)} \wedge m)\,\frac{1}{|\Omega|})$; para $m > n$ se tiene

$$ {}^\circ(\sum_{\omega\in\Omega} (F(\omega) \wedge m)\,\frac{1}{|\Omega|}) = {}^\circ(\sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)\,\frac{1}{|\Omega|}) $$

$$ = {}^\circ\overline{E}\,(F) $$

luego, $\lim\limits_{m\to\infty} {}^\circ\overline{E}(F \wedge m) = {}^\circ\overline{E}\,(F)$ .

<u>Proposición</u>: $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$; $\zeta$ integrable con respecto a la medida de Loeb ssi $\zeta$ tiene un levantamiento $S$-integrable $F$.

Además, si $F$ es levantamiento $S$-integrable de $\zeta$: ${}^\circ\overline{E}\,(F) = E(\zeta)$, i.e.

$$ {}^\circ\sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)\,\frac{1}{|\Omega|} = \int_\Omega \zeta(\omega)\,d\omega \; . $$

<u>Dem</u>. Ver Loeb p. 117.

<u>Observación</u>: En los términos más generales de la observación en la pág. 24 se tiene de hecho el siguiente resultado:

Si $\zeta$ es una función interna, $\mathcal{A}$-medible que toma valores finitos en $X$; entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$, $\int_A \zeta d\nu \approx \int_A {}^\circ\zeta d\nu_0$ .

<u>Proposición</u>: Una función $F: \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es $S$-integrable si y sólo si $F$ es interna y para cada conjunto interno $B \subseteq \Omega$ de Loeb-medida $0$ ( en esta caso ${}^\circ\mu(B) = 0$), $\sum\limits_{\omega\in B} F(\omega)\,\frac{1}{|\Omega|} \approx 0$.

<u>Dem</u>. Ver Anderson p. 18.

<u>Proposición</u>: $(\Omega_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mu_2)$ espacios hiperfinitos. $U \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$. Si $U$ es sedible con respecto al producto $L(\mu_1) \times L(\mu_2)$ de las medidas de Loeb $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$ sobre $\Omega_1$, $\Omega_2$, resp., entonces $U$ es medible con respecto a la medida de Loeb $L(\mu_1 \times \mu_2)$ sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ y ambas medidas coinciden. (i.e. $U$ medible respecto a $(\Omega_1 \times \Omega_2, L(\Omega_1) \times L(\Omega_2), L(\mu_1) \times L(\mu_2))$ (completado) $\Rightarrow$ $U$ medible respecto a $(\Omega_1 \times \Omega_2, L(\Omega_1 \times \Omega_2), L(\mu_1 \times \mu_2)))$.

<u>Dem</u>. Ver Anderson p. 28.

<u>Observación</u>: El recíproco no es cierto. Ver 1.3 en Hoover "Ann. of Math. Logic" 14 (78) pp. 287-313.

<u>Proposición</u>: (tipo Fubini). Sean $\Omega_1$, $\Omega_2$ espacios hiperfinitos y sea $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, función Loeb-medible acotada sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$ (i.e. para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\underline{\omega} \in \Omega_1 \times \Omega_2 : f(\underline{\omega}) < \alpha\} \in L(\Omega_1 \times \Omega_2)$ y $|f| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}$). Entonces !

i) para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$, $f(\omega_1, \cdot)$ es Loeb-medible en $\Omega_2$.

ii) la función $g(\omega_1) = \int f(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_2$ es Loeb-medible en $\Omega_1$.

iii) $\int f(\omega_1, \omega_2)\, d(\omega_1, \omega_2) = \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_2\right) d\omega_1$

<u>Dem</u>. Sean $(\Omega_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mu_2)$ los espacios hiperfinitos y $P := L(\mu_1 \times \mu_2)$.

! : el teo. clásico de Fubini habla sobre una función $f: \Omega_1 \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$ que es medible con respecto a $L(\Omega_1) \times L(\Omega_2)$. Aquí $f$ es $L(\Omega_1 \times \Omega_2)$-medible. Como $L(\Omega_1 \times \Omega_2) \supsetneqq L(\Omega_1) \times L(\Omega_2)$, la situación es más general. Se necesita un nuevo teo. de Fubini.

Sea $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ y para cada $\omega_1 \in \Omega_1$,

$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$.

Las proposiciones $(1)$-$(4)$ son equivalentes:

(1) $P(A) = 0$

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $A^n \supseteq A$, $A^n$ interno (i.e. $A^n \in {}^*P(\Omega_1 \times \Omega_2)$), tal que $P(A^n) < 1/n$.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $A^n \supseteq A$, interno, tal que $L(\mu_1)(L(\mu_2)(A^n_{\omega_1} < \frac{1}{n})) \geq 1 - 1/n$.

(4) Para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$, $L(\mu_2)(A_{\omega_1}) = 0$ .

Ahora, sabemos que $\zeta$ tiene un levantamiento finitamente acotado $F$:

$\Omega_1 \times \Omega_2 \to {}^*\mathbb{R}$ ($F$ es interna, ${}^\circ F(\underline{\omega}) = \zeta(\underline{\omega})$ $P$ - c.s. y como $|\zeta| < r \in \mathbb{R}$, $|{}^\circ F| = {}^\circ|F| < r \in \mathbb{R}$ $P$ - c.s., entonces $|F| < r$ $P$ - c.s.).

Sea $A := \{\underline{\omega} \in \Omega_1 \times \Omega_2 : {}^\circ F(\underline{\omega}) \neq \zeta(\underline{\omega})\}$.

$A$ tiene $P$ - medida $0$. Por $(4)$: para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$ : $L(\mu_2)(A_{\omega_1}) = 0$, i.e. $L(\mu_2)\{\omega_2 \in \Omega_2 : {}^\circ F(\omega_1, \omega_2) \neq \zeta(\omega_1, \omega_2)\} = 0$. Luego, para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$: $F(\omega_1, \cdot)$ es un levantamiento de $\zeta(\omega_1, \cdot)$. Entonces, para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$, $\zeta(\omega_1, \cdot)$ es $L(\mu_2)$ - medible. Así tenemos (i).

Sea, ahora, $G(\omega_1) := \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} F(\omega_1, \omega_2) \dfrac{1}{|\Omega_2|}$ . la "integral de $F(\omega_1, \cdot)$"; en aquellos puntos $\omega_1$ donde $F(\omega_1, \cdot)$ levanta a $\zeta(\omega_1, \cdot)$, tenemos que $F(\omega_1,\cdot)$ es $S$-integrable c.r.a. $\mu_2$ ( ya que $F(\omega_1\ ,\cdot)$ es interna y $S$-acotada (!)), además,

$$°G(\omega_1) = °\sum_{\omega_2\in\Omega_2} F(\omega_1,\omega_2)\frac{1}{|\Omega_2|}$$

$$= \int f(\omega_1,\omega_2)\,d\omega_2$$

$$= g(\omega_1)\ \text{(esto para casi todo } \omega_1\text{)},$$

luego, $G$ es un levantamiento de $g$ en $\Omega_1$ (notar que $G$ es interna). Como $g$ tiene un levantamiento, $g$ es $L(\mu_1)$-medible. Así tenemos (ii). Finalmente,

$$\int f(\omega_1,\omega_2)d(\omega_1,\omega_2) = °\sum F(\omega_1,\omega_2)\frac{1}{|\Omega_1||\Omega_2|}$$ (F es levantamiento $S$-integrable de $f$)

$$= °\sum_{\omega_1}\Big(\sum_{\omega_2} F(\omega_1,\omega_2)\frac{1}{|\Omega_2|}\Big)\cdot\frac{1}{|\Omega_1|}$$

$$= °\sum G(\omega_1)\frac{1}{|\Omega_1|} = \int g(\omega_1)\,d\omega_1\ .$$

Observación: La noción de parte standard y la noción de levantamiento también pueden ser definidas para espacios de Hausdorff. separables

! Consideremos un espacio de Hausdorff separable $S \in V(\mathbb{R})$. Para cada punto $b \in {}^*S$ hay a lo más un punto $p \in S$ tal que $b \in {}^*A$

---

(!) En realidad tenemos $|F| < r \in \mathbb{R}$ y $\underbrace{P\{\underline{\omega}\in\Omega_1\times\Omega_2 : |F| > r\}}_{=:\ B,\ \text{interno}} = 0$,

pero podemos modificar $F$, tomando $F_1$ def. mediante

$$F_1(\underline{\omega}) := \begin{cases} F & \text{si } \underline{\omega}\in B^C \\ r & \text{si } \underline{\omega}\in B \end{cases},$$

$F_1$ es interna y $S$-acotada.

! Creo que hay que agregar la hipótesis de que cada pto. tiene una base de vecindades enumerable.

para cada vecindad $A$ de $p$: si existe tal $p$, entonces
$b \in \cap\{{}^*A : p \in A$ y $A$ abierto de $S\}$ y
decimos que $p$ <u>es la parte standard de $b$</u> ($p =: {}^\circ b$). Si existe ${}^\circ b$, decimos que $b$ es <u>casi standard</u>. Para el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, un punto $b \in {}^*\mathbb{R}^m$ es <u>casi standard</u> ssi es finito (i.e. cada componente es finita).

<u>Proposición</u>: $S, T$ espacios de Hausdorff y cada punto tiene una base de vecindades numerable. Una función $f: S \to T$ es continua si y sólo si para cada punto casi standard $b \in {}^*S : {}^\circ(f(b)) = f({}^\circ b)$ (usamos la convención $f(b) \equiv ({}^*f)(b)$).

<u>Observación</u>: La proposición en el caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toma la forma: $f$ continua en $x \in \mathbb{R}$ siempre y cuando para todo $y \in {}^*\mathbb{R} : y \approx x \Rightarrow {}^*f(y) \approx f(x)$.

Damos la demostración en este caso particular:
"=>" Supongamos $f$ continua. Entonces dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$V(\mathbb{R}) \models \forall y \in \mathbb{R} (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon). \text{ Luego,}$$

$$V({}^*\mathbb{R}) \models \forall y \in {}^*\mathbb{R} (|x-y| < \delta \to |f(x) - {}^*f(y)| < \varepsilon)$$

Sea ahora $y \approx x$, entonces $|x-y| < \delta$, luego, $|{}^*f(y) - f(x)| < \varepsilon$, i.e. :
para todo $y \in {}^*\mathbb{R}$ ($y \approx x \Rightarrow |{}^*f(y) - f(x)| < \varepsilon$)
con $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ cualquiera; entonces $y \approx x \to {}^*f(y) \approx f(x)$.
"<=" Sup. $y \approx x \Rightarrow {}^*f(y) \approx f(x)$, y que $f$ no es continua en $x$. Entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$V(\mathbb{R}) \models \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \exists y \in \mathbb{R} (|x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

Luego,

$$V(^*\mathbb{R}) \models \forall \delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \; \exists y \in {}^*\mathbb{R} \, (|x-y| < \delta \wedge |f(x) - {}^*f(y)| \geq \varepsilon)$$

Tomemos $\delta = c$ (infinitesimal positivo), entonces existe $y \in {}^*\mathbb{R}$ con $|x-y| < c$, i.e. $x \approx y$, tal que $|f(x) - {}^*f(y)| \geq \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, pero $|f(x) - {}^*f(y)| \geq \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ $f(x) \not\approx {}^*f(y)$.

Contradicción!

<u>Definición</u>: Sea $S$ espacio de Hausdorff y sea $f : \Omega \to S$, $F : \Omega \to {}^*S$. $F$ es <u>levantamiento</u> de $f$ si $F$ es interna y ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

<u>Proposición</u>: Sea $M$ un espacio métrico separable (espacio métrico con base numerable). Una función $f : \Omega \to M$ es Loeb-medible si y sólo si $f$ tiene un levantamiento $F : \Omega \to {}^*M$.

(Esta proposición generaliza una anterior con $M = \mathbb{R}$).

<u>Dem</u>. "<=" $F$ levantamiento de $f$. $\rho$ métrica para $M$. Para $p \in M$, $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n(p) := \{q \in M : \rho(p,q) < 1/n\}$.
Como $M$ es separable, basta con demostrar que para cada $p \in M$ y $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(S_n(p))$ es Loeb-medible.

Para $p,q \in {}^*M$, escribimos $\rho(p.q)$ en lugar de $({}^*\rho)(p,q)$.

Sea $U = \{\omega \in \Omega : {}^\circ F(\omega) = f(\omega)\}$, $U$ tiene Loeb-medida 1. Para $\omega \in U$, son equivalentes:

$$\mathfrak{f}(\omega) \in S_n(p)$$
$$\rho(p, {}^\circ F(\omega)) < 1/n$$
$${}^\circ\rho(p, F(\omega)) < 1/n$$
$$\omega \in \underbrace{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\alpha : \rho(p, F(\alpha)) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}\}}_{\in B(\Omega)}$$

luego, $U \cap \mathfrak{f}^{-1}(S_n(p)) \in L(\Omega)$, y entonces $\mathfrak{f}^{-1}(S_n(p))$ es Loeb-medible.

" =>": Supongamos $\mathfrak{f}: \Omega \to M$, Loeb-medible. Sea $S_1, S_2, \ldots$ una base de abiertos para la topología de $M$ y sean $U_n = \mathfrak{f}^{-1}(S_n)$. Cada $U_n$ es Loeb-medible, entonces hay conjuntos internos $A'_n$ tales que $P(A'_n \Delta U_n) = 0$ (Obs. 2, pág. 23).

Podemos escoger una nueva sucesión $A_n$ de conjuntos internos tal que $P(A_n \Delta U_n) = 0$ y, siempre que $U_{n_1} \cap \ldots \cap U_{n_k} = \phi$, se tenga $A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} = \phi$. Esto puede ser hecho en forma inductiva:

$$A_n := A'_n - \cup \{A_{m_1} \cap \ldots \cap A_{m_k} : m_1 < n,\ U_n \cap U_{m_1} \cap \ldots \cap U_{m_k} = \phi\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n$ el conjunto de todas las funciones internas $F: \Omega \to {}^*M$ tales que para todo $m \leq n$, $F$ aplica $A_n$ en ${}^*S_n$, entonces $G_n$ es un conjunto interno (está definido en términos de entidades internas) y, por la elección de los $A_n$, $G_n$ es no vacío. Además, $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$. Por el principio de saturación, hay un $F \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, entonces $F$ es una función interna de $\Omega$ en ${}^*M$. El conjunto $U = \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \Delta U_n)$ tiene Loeb-medida 1. Para $\omega \in U$, $F(\omega) \in \cap \{{}^*S_n : f(\omega) \in S_n\}$. Como los $S_n$ son abiertos y además, forman una base para la topología de $M$, tenemos, por definición de parte standard, que ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$ cuando $\omega \in U$. Así $F$ es un levantamiento de $f$.

<u>Observación</u>: 1) Dados dos espacios métricos $L$ y $M$, denotaremos mediante $C(L,M)$ al conjunto de las funciones continuas de $L$ en $M$. Nos preocuparemos especialmente de los espacios $IR^m$ con la norma $\|y\| = \max|y_k|$, de los espacios $C([0,1], IR^m)$ con la norma $\|f\| = \sup_{0 \le t \le 1} \|f(t)\|$, y de los espacios $C(IR^\ell, IR^m)$ con la métrica $\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(1, \sup_{\|y\| \le n} \|f(y) - g(y)\|)$.

Todos éstos son espacios métricos separables. Las dos últimas métricas proporcionan la topología compacto-abierto con la base numerable $C(K,U)$, $K$ compacto, $U$ abierto.

2) En general, si $L$ y $M$ son espacios métricos separables y $L$ es localmente compacto, entonces $C(L,M)$ con la topología compacto-abierto es un espacio métrico separable.

3) Por el principio de transferencia, cada $F \in {}^*C(L,M)$ es una función de ${}^*L$ en ${}^*M$.

4) La siguiente proposición caracteriza ${}^\circ F$ en términos de los valores de $F$: Sean $L$ y $M$ espacios métricos separables, $L$ localmente compacto, $C(L,M)$ con la to-

pología compacto-abierto. Si $f \in C(L,M)$ y $F \in {}^*C(L,M)$, entonces ${}^\circ F = f$ ssi para cada punto casi-standard $b \in {}^*L$, ${}^\circ(F(b)) = f({}^\circ b)$.

en el sentido de la topología de $C(L,M)$

(de la topología compacto abierto)

## § 4 PROCESOS ESTOCASTICOS HIPERFINITOS

Para analizar procesos estocásticos, aproximaremos el intervalo de tiempo [0,1] mediante un conjunto hiperfinito $T$. Sea $\Delta t$ un infinitesimal positivo tal que $1/\Delta t$ es hiperentero: $1/\Delta t \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Sea $T$ el conjunto hiperfinito

$$T = \{0,\ \Delta t,\ 2\Delta t, \ldots,\ 1\}$$

$$= \{K\,\Delta t : K \in {}^*\mathbb{N},\ 0 \leq K\,\Delta t \leq 1\};$$ llamaremos

a $T$ la recta temporal hiperfinita.

Usaremos $\underline{r}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$, $\underline{u}$ para denotar elementos de $T$. Por comodidad, elegimos $\Delta t$ de modo que $1/\Delta t = L!$ con $L \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$; de este modo cada número racional $m/n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ también está en $T$:

$$\underset{0}{[}\ \cdot\ \underset{\Delta t}{\cdot}\ \underset{2\,\Delta t}{\cdot}\ \overset{3\,\Delta t}{\cdot}\ \cdots\ \overset{(L!-1)\,\Delta t}{\cdot}\ \underset{1}{]}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} L! \times \frac{1}{L!} = \underbrace{\frac{m}{n} L!}_{\in {}^*\mathbb{N}}\ \Delta t$$ y, además, $0 \leq \frac{m}{n} L! \leq L!$, ya que $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$.

Ningún número irracional $r \in [0,1]$, está en $T$, pero hay un único $\underline{t} \in T$ tal que $t < r < t + \Delta t$. En consecuencia, la aplicación parte standard $°: T \to [0,1]$ aplica $T$ sobre $[0,1]$.

Proposición: Un conjunto $A \subseteq [0,1]$ es Lebesgue-medible si y sólo si $B := \{\underline{t} \in T: °\underline{t} \in A\}$ es Loeb-medible. Más aún, si $A$ es Lebesgue medible, entonces la medida de Lebesgue de $A$ coincide con la medida de Loeb de $B$.

Dem. Anderson p. 24-25, Henson.

La proposición anterior conduce a una caracterización de las funciones Lebesgue-medibles.

Definición: Sea $M$ un espacio de Hansdorff, sea $f:[0,1] \to M$, y sea $F: T \to {}^*M$, interna. $F$ es un levantamiento de $f$ si $°F(\underline{t}) = f(°\underline{t})$ para casi todo $\underline{t} \in T$. (*i.e.*, *c.r.a.* $(T, L(T), P)$).

Observación: Si definimos $f_1 : T \to M$ mediante $f_1(\underline{t}) = f(°\underline{t})$, entonces $F$ es un levantamiento de f ssi $F$ es levantamiento de $f_1$ en el sentido anterior (pág. 33 ). Recordemos que la definición anterior hablaba de funciones $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $F: \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, ahora tenemos $f$ definida en $[0,1]$.

Después se combina ambos tipos de levantamiento al considerar funciones $f: \Omega \times [0,1] \to M$.

Corolario: Sea $M$ espacio métrico separable y $f: [0,1] \to M$. Entonces $f$ es Lebesgue-medible si y sólo si tiene un levantamiento $F$.

Dem. Hagamos $f_1(\underline{t}) = f(°\underline{t})$, $\underline{t} \in T$. Por la proposición anterior, para cada abierto $U \subseteq M$, $f^{-1}(U)$ es Lebesgue-medible *ssi* $f_1^{-1}(U)$ es Loeb-medible, ya que $f_1^{-1}(U) = \{\underline{t} \in T: f_1(\underline{t}) \in U\}$

$= \{\underline{t} \in T : f(°\underline{t}) \in U\} = \{\underline{t} \in T : °\underline{t} \in f^{-1}(U)\}$. Luego, $f$ es Lebesgue-medible ssi $f_1$ es Loeb-medible. Pero $f_1$ es Loeb-medible ssi tiene un levantamiento $F$. Por la observación previa $F$ debe ser también levantamiento de $f$.

Observaciones: 1) Sean $A, B$ conjuntos hiperfinitos, sea $A^B$ el conjunto de todas las funciones internas $F: B \to A$. $A^B$ es también hiperfinito y $|A^B| = |A|^{|B|}$.

2) Estudiaremos procesos estocáticos sobre un espacio muestral $\Omega$ con valores en un espacio métrico separable $M$. En lo que sigue supondremos siempre que:

2.1 $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, 1\}$ con $\Delta t = 1/L!$ para algún $L \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

2.2 $\Omega$ es un espacio hiperfinito con medida de Loeb $P$ uniforme, i.e. $P$ es generada por la parte standard de $\mu$, con $\mu(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$, $B \in {}^*P(\Omega)$.

2.3 $M$ es espacio métrico separable con métrica $\rho$. Para $a, b \in {}^*M$, escribiremos $\rho(a,b)$ en lugar de $({}^*\rho)(a,b)$.

Definición: Un proceso estocástico es una función $x: \Omega \times [0,1] \to M$ tal que cada $x(\cdot, t)$ es medible. (i.e. para cada abierto $U \subseteq M$, $\{\omega \in \Omega : x(\omega, t) \in U\}$ es Loeb-medible $(\in L(\Omega))$).

Un proceso estocástico hiperfinito es una función interna $X: \Omega \times T \to {}^*M$.

Definición: Sean $x$ un proceso estocástico y $X$ un proceso estocástico hiperfinito.

$X$ es un levantamiento de de $x$ si $°X(\omega, \underline{t}) = x(\omega, °\underline{t})$ casi seguramente con respecto a la medida de Loeb en $\Omega \times T$.

$X$ es un levantamiento uniforme de $x$ si, para casi todo $\omega \in \Omega$, $(\forall \underline{t} \in T)\ °X(\omega, \underline{t}) = x(\omega, °\underline{t})$.

Definición: Un conjunto o función se dice $\Omega \times [0,1]$-medible si es medible con respecto al producto de la medida de Loeb en $\Omega$ y la medida de Lebesgue en $[0,1]$, y $\overline{\Omega \times [0,1]}$-medible si es medible con respecto a la completación del producto.

Teorema: Una función $x: \Omega \times [0,1] \to M$ es $\overline{\Omega \times [0,1]}$-medible si y sólo si tiene un levantamiento (i.e. $\exists$ $X: \Omega \times T \to {}^*M$, $t.q.$ ${}^\circ X(\omega,\underline{t}) = x(\omega, {}^\circ\underline{t})$, $P_{\Omega\times T}$-$c.s.$)

Dem. No se da, usa herramientas más poderosas del ánalisis no standard. Notar que $x$ no necesita ser un proceso estocástico. (ver Keisler §7)

Definición: Un proceso estocástico $x: \Omega \times [0,1] \to M$ es continuo si $x(\omega,\cdot)$ es continuo en $[0,1]$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

Obs.: Todo proceso continuo $x$ sobre $\Omega$ es $\overline{\Omega \times [0,1]}$-medible. Más aún, si $x(\omega,t)$ es continuo, entonces hay un proceso $\Omega \times [0,1]$-medible $y(\omega,t)$ tal que $y(\omega,\cdot)$ es continuo para todo $\omega \in \Omega$ y $x(\omega,\cdot) = y(\omega,\cdot)$ c.s.

Teorema: Un proceso estocástico $x$ es continuo si y sólo si tiene un levantamiento uniforme (i.e. $\exists X: \Omega \times T \to {}^*M$, t.q. para casi todo $\omega \in \Omega$ : $(\forall\ \underline{t} \in T)\ {}^\circ X(\omega,\underline{t}) = x(\omega, {}^\circ\underline{t})$).

Dem. Supongamos que $x$ es continuo. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x(\omega,\cdot)$ es continua para todo $\omega$. El espacio $C([0,1],M)$ con la métrica del supremo es separable. Definamos $y:\Omega \to C([0,1],M)$ mediante $y(\omega) := x(\omega,\cdot)$. Como $x$ es proceso continuo, $y$ es medible en $\Omega$. Luego, (pág. 33) $y$ tiene un levantamiento $Y : \Omega \to {}^*C\,([0,1], M)$.

Sea $U$ el conjunto de todos los $\omega \in \Omega$ tales que ${}^\circ Y(\omega) = y(\omega)$. Entonces $U$ tiene (Loeb-) medida 1. Sea $\omega \in U$ y $\underline{t} \in T$. Se tiene ${}^\circ(Y(\omega)(\underline{t})) = y(\omega)\ ({}^\circ\underline{t})$ (pág. 35 (4)).

Definamos $X : \Omega \times T \to {}^*M$ por $X(\omega,\underline{t}) = Y(\omega)\ (\underline{t})$.

Entonces ${}^\circ X(\omega,\underline{t}) = {}^\circ(Y(\omega)(\underline{t}))$

$$= y(\omega)\ ({}^\circ\underline{t}) = x\ (\omega, {}^\circ\underline{t}).$$

Así $X$ es un levantamiento uniforme de $x$.

Ahora supongamos que $X$ es un levantamiento uniforme de $x$. Para todo $\omega$ en un conjunto $U$ de medida 1, se tiene ${}^\circ X(\omega,\underline{t}) = x(\omega, {}^\circ\underline{t})$ para todo $\underline{t} \in T$. Sea $\omega \in U$ y $\varepsilon > 0$ real.

Cuando $\underline{t}_1 \approx \underline{t}_2$ se tiene:

$${}^\circ X(\omega,\underline{t}_1) = x(\omega, {}^\circ\underline{t}_1) = x(\omega, {}^\circ\underline{t}_2) = {}^\circ X\ (\omega,\underline{t}_2),$$

entonces

$$(*) \quad \rho(X(\omega,\underline{t}_1),\ X(\omega,\underline{t}_2)) < \varepsilon .$$

Sea $A := \{r \in {}^*\mathbb{R} : (\forall \underline{t}_1, \underline{t}_2 \in T)(|\underline{t}_1 - \underline{t}_2| < r \Rightarrow (*)) \wedge r < 1\}$

$A$ es no vacío $(2\Delta t \in A)$, interno y acotado sup., luego, tiene un supremo $\delta$. Ahora, $\delta$ no puede ser infinitesimal, ya que $A$ contiene a todo infinitesimal positivo y es interno lo que implica que $A$ contiene algún real $(\in \mathbb{R}_+)$. Así existe $\delta = sup\ A$ con $0 < \delta \in \mathbb{R}_+$.

Sea $|\underline{t}_1 - \underline{t}_2| < \delta$, entonces $\rho(X(\omega,\underline{t}_1), X(\omega,\underline{t}_2)) < \varepsilon$. Como $\rho$ es continua en $M \times M$, tenemos que siempre que $s_1, s_2$ son reales $|s_1 - s_2| < \delta$, $\rho\ (x(\omega,s_1),\ x(\omega,s_2)) \leq \varepsilon$. En efecto, existen

$\underline{t}_1, \underline{t}_2 \in T$ con $^{\circ}\underline{t}_1 = s_1$, $^{\circ}\underline{t}_2 = s_2$ y entonces $|\underline{t}_1 - \underline{t}_2| < \delta$ y se tiene $\rho(X(\omega,\underline{t}_1), X(\omega,\underline{t}_2)) < \varepsilon$; ocupando ahora la observación (4) en pág. 35, tenemos

$$^{\circ}(\rho(X(\omega,\underline{t}_1), X(\omega,\underline{t}_2))) = \rho(^{\circ}X(\omega,\underline{t}_1), {}^{\circ}X(\omega,\underline{t}_2))$$

$$= \rho(x(\omega, s_1), x(\omega,s_2))$$

$$\therefore \rho(x(\omega, s_1), x(\omega,s_2)) \leq \varepsilon .$$

Así $x(\omega,\cdot)$ es continua (para casi todo $\omega \in \Omega$) en $[0,1]$.

Observación: En lo que sigue nos concentraremos en espacios adaptados y procesos estocásticos.

Definición: Una filtración en un espacio de probabilidad $(\Delta,\mu)$ es una familia de $\sigma$-álgebras $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,1]$, sobre $\Delta$ tales que $s < t$ implica $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ y $\mathcal{F}_1$ es el dominio de $\mu$.

Un espacio adaptado es un espacio de probabilidad con una filtración:

$$\Delta = (\Delta,\mu,\mathcal{F}_t)_t \quad [0,1]$$

Intuitivamente, $\mathcal{F}_t$ es el conjunto de sucesos que dependen sólo del estado del mundo hasta el tiempo $t$.

Definición: Un proceso estocástico $x(\lambda,t)$ sobre $\Delta$ se llama adaptado si $x(\cdot,t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \in [0,1]$. $x$ se llama progresivamente medible si para cada $t \in [0,1]$, la restricción de $x$ a $\Delta \times [0,t]$ es $\mathcal{F}_t \times [0,t]$-medible.

Observaciones: 1) Todo proceso progresivamente medible es adaptado.

2) Si $x$ es adaptado y $\overline{\Delta \times [0,1]}$-medible, entonces, para cada $t$, la restricción de $x$ a $\Delta \times [0,t]$ es $\overline{F_t \times [0,t]}$-medible.

3) Sin embargo, adaptado y $\Delta \times [0,1]$-medible no implica progresivamente medible.

Sea $\Omega$ un conjunto hiperfinito de la forma $\Omega = (\Omega_0)^T$, donde $\Omega_0$ es un conjunto hiperfinito con al menos dos elementos. Construiremos una filtración particular sobre $\Omega$ que conduce a un espacio adaptado especialmente bien dotado.

Definición: Un espacio adaptado hiperfinito es un espacio adaptado $\underline{\Omega} = (\Omega, P, A_t)_{t \in [0,1]}$ donde:

i) $\Omega$ es un conjunto hiperfinito de la forma $\Omega = \Omega_0^T$ donde $\Omega_0$ tiene al menos dos elementos.

ii) $P$ es la medida de Loeb uniforme sobre $\Omega$.

iii) Para cada $\underline{t} \in T$, $\approx_{\underline{t}}$ es la relación interna de equivalencia sobre $\Omega$: $\omega \approx_{\underline{t}} \omega' \;:\Longleftrightarrow\; \omega(\underline{s}) = \omega'(\underline{s})$ para todo $\underline{s} < \underline{t}$.

iv) Para cada $t \in [0,1]$, $\sim_t$ es la relación externa de equivalencia sobre $\Omega$: $\omega \sim_t \omega' \;:\Longleftrightarrow\; \omega \approx_{\underline{t}} \omega'$ para todo $\underline{t} \simeq t$ (es decir, $\omega(\underline{s}) = \omega'(\underline{s})$ cuando $\underline{s} < t$ o $\underline{s} \approx t$).

v) $A_t$ es el $\sigma$-álgebra de todos los conjuntos Loeb-medibles que son cerrados bajo la relación $\omega \sim_t \omega'$. (i.e. Si $B \in A_t$, entonces $B$ es Loeb $(P)$-medible, $B \subseteq \Omega$, y $\omega \in B$ con $\omega \sim_t \omega'$ implica $\omega' \in B$). Claramente $A_s \subseteq A_t$ si $s < t$.

Supondremos en adelante que $\underline{\Omega}$ es un espacio hiperfinito adaptado con la filtración $(A_t)$.

Proposición:

i) La filtración $(A_t)$ es continua por la derecha, es decir, para cada $t$ $[0,1]$, $A_t = \bigcap_{s>t} A_s$.

ii) Para cada $K \in A_t$ hay un conjunto interno $B \in A_t$ tal que $P(K \,\Delta\, B) = 0$.

iii) Un conjunto interno $B \subseteq \Omega$ pertenece a $A_t$ si y sólo si hay un $\underline{s} \simeq t$ tal que $B$ es cerrado bajo la relación $\omega \approx_{\underline{s}} \omega'$.

Dem. (i) Supongamos $\omega \sim_t \omega'$, es decir, $\omega \approx_{\underline{t}} \omega'$ para todo $\underline{t} \simeq t$. Como $T$ es hiperfinito, hay un mayor $\underline{r} \in T$ tal que $\omega \approx_{\underline{r}} \omega'$ (aquí se usa el hecho que $\approx_{\underline{t}}$ es interna). Entonces ${}^\circ\underline{r} > t$ (si no, sería, p.e., también $\omega \approx_{\underline{r} + \Delta t} \omega'$), y en consecuencia, $\omega \sim_s \omega'$ para algún $s > t$ (podemos tomar $s = {}^\circ\underline{r}$).

Ahora, sean $U \in \bigcap_{s>t} A_s$, $\omega \in U$ y $\omega \sim_t \omega'$. Entonces $\omega \sim_s \omega'$ para algún $s > t$. $U \in A_s$, de modo que $\omega' \in U$. Así $U$ es cerrado bajo $\omega \sim_t \omega'$. Así $U \in A_t$ y hemos probado que $\bigcap_{s>t} A_s \subseteq A_t$; la otra inclusión es inmediata.

(ii) Para cada conjunto $C \subseteq \Omega$ y $\underline{s} \in T$, sea $C^{\underline{s}}$ la clausura de $C$ con respecto a la relación $\approx_{\underline{s}}$, y sea $C_{\underline{s}} := \Omega \setminus (\Omega \setminus C)^{\underline{s}}$. Cuando ${}^\circ\underline{s} > t$, se tiene $\underline{K = K^{\underline{s}} = K_{\underline{s}}}$ (Si $K \in A_t$, entonces $K$ es cerrado bajo $\sim_t$ o equivalentemente bajo "$\approx_{\underline{t}}$ para todo $\underline{t} \simeq t$". Cuando $\omega \in K$ y $\omega \approx_{\underline{s}} \omega'$, entonces $\omega \approx_{\underline{u}} \omega'$ para todo $\underline{u} \leq \underline{s}$, en particular, $\omega \approx_{\underline{t}} \omega'$ para todo $t \simeq \underline{t}$, luego, $\omega' \in K$. Así, $K^{\underline{s}} = K$. Análogamente se ve que $K_{\underline{s}} = K$, ya que $\Omega \setminus K \in A_t$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos conjuntos internos $U_n \subseteq K \subseteq V_n$ tales que:

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq K \subseteq \cdots \subseteq V_2 \subseteq V_1$$

y $P(V_n \setminus U_n) < 1/n$. (ver pág. 23, obs. (2)).

Entonces, cuando $°\underline{s} > t$,

$$U_n \subseteq U_{\underline{n}}^{\underline{s}} \subseteq K^{\underline{s}} = K = K_{\underline{s}} \subseteq V_{n_{\underline{s}}} \subseteq V_n .$$

Luego, cualquier intersección finita de los conjuntos internos $\{\underline{s} : t \leq \underline{s} < t + 1/2,\ U_{\underline{m}}^{\underline{s}} \subseteq V_{n_{\underline{s}}}\}$ es no vacía. Por el principio de saturación, hay $\underline{s} \approx t$, tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $U_{\underline{m}}^{\underline{s}} \subseteq V_{n_{\underline{s}}}$. Nuevamente por saturación, hay un conjunto interno $B$ tal que para todo $n$, $U_n \subseteq U_{\underline{n}}^{\underline{s}} \subseteq B \subseteq V_{n_{\underline{s}}} \subseteq V_n$. Como $B$ es interno, $B^{\underline{s}}$ es también interno (está definido en términos internos), y tenemos $U_n \subseteq U_{\underline{n}}^{\underline{s}} \subseteq B^{\underline{s}} \subseteq V_{n_{\underline{s}}} \subseteq V_n$ ($V_{n_{\underline{s}}}$ es cerrado con respecto a $\approx_{\underline{s}}$).

Se obtiene que $P(K \Delta B^{\underline{s}}) = 0$. Como $B^{\underline{s}}$ es cerrado con respecto a $\approx_{\underline{s}}$, $B^{\underline{s}}$ es cerrado con respecto a $\sim_t$ (sea $w \sim_t w'$ con $w \in B^{\underline{S}}$, hay que probar que $w' \in B^{\underline{S}}$. Como $w \sim_t w'$, tenemos que $w \approx_{\underline{t}} w'$ para todo $\underline{t} \approx t$; en particular $w \approx_{\underline{s}} w'$, luego, $w' \in B^{\underline{s}}$). Así $B^{\underline{s}} \in A_t$.

(iii) Sea $B$ interno. Si $B$ es cerrado bajo $\approx_{\underline{s}}$ para algún $\underline{s} \approx t$, entonces $B$ es cerrado con respecto a $\sim_t$, luego, $B \in A_t$. Supongamos que $B \in A_t$, entonces para todo $\underline{r}$ con $°\underline{r} > t$, $B$ es cerrado con respecto a $\approx_{\underline{r}}$ (ver (ii)). Como $B$ es interno, hay un menor $\underline{s} \in T$ tal que $\underline{s} > t$ y $B$ es cerrado c.r.a. $w \approx_{\underline{s}} w'$ (usamos la internalidad de $\approx_{\underline{s}}$). Se tiene que $\underline{s} \approx t$.

TEOREMA: Sea $x(\omega,t)$ un proceso estocástico en un espacio adaptado hiperfinito $\underline{\Omega}$. Si $x$ es adaptado y $\Omega \times [0,1]$-medible, entonces $x$ es progresivamente medible.

Observación: Este teorema hace que los espacios adaptados hiperfinitos sean útiles para trabajar con ellos.

Dem. Sea $t \in [0,1]$ y sea $B$ un subconjunto de Borel de $M$.
Sea:

$$C = \{(\omega,u) : u < t \ \text{ y } \ x(\omega,u) \in B\}$$

Demostraremos que $C$ es $A_t \times [0,t)$-medible.

Elijamos $\underline{t} \in T$ tal que $°\underline{t} = t$ y sea $\mathcal{B}$ el $\sigma$-álgebra de todos los conjuntos Loeb-medibles $U \subseteq \Omega$ tales que $U$ es cerrado con resp. a la relación de equivalencia $\approx_{\underline{t}}$. Entonces $\mathcal{B} \subseteq A_t$ y, luego, basta demostrar que $C$ es $\mathcal{B} \times [0,t)$-medible.

Para cada $\omega \in \Omega$, sea $P_\omega$ la medida de Loeb uniforme sobre el conjunto interno $(\omega \upharpoonright \underline{t}) = \{\omega' \in \Omega : \omega \approx_{\underline{t}} \omega'\}$ (notar que $(\omega \upharpoonright \underline{t})$ está definido en términos internos y que $(\omega \upharpoonright \underline{t})$ es hiperfinito por ser $\Omega$ hiperfinito, luego, tiene sentido definir ahí una medida de Loeb uniforme) y para cada conjunto $S \subseteq \Omega$ definamos $P_\omega(S) = P_\omega(S \cap (\omega \upharpoonright \underline{t}))$.

Sea $F$ el $\sigma$-álgebra de todos los conjuntos $U \subseteq \Omega$ tales que $U$ es Loeb-medible y para cada $\omega \in \Omega$, $U \cap (\omega \upharpoonright \underline{t})$ es $P_\omega$-medible.

Afirmación 1ª: Si $S$ es $\Omega \times [0,t)$-medible y para cada $u < t$ la sección $S_u := \{\omega : (\omega,u) \in S\}$ es cerrada c.r.a $\approx_{\underline{t}}$, entonces $S$ es $F \times [0,t)$-medible.

(Dem. ver Keisler p. 35)

Notemos que si $S$ es $F \times [0,t)$-medible, entonces toda sección $S_u$ pertenece a $F$, luego, $S_u \cap (\omega \restriction \underline{t})$ es $P_\omega$-medible para cada $\omega \in \Omega$ (simplemente por definición de $F$). Dado un conjunto $S$ $F \times [0,t)$-medible y un real $p > 0$, definamos:

$$S^{(p)} := \{(\omega,u) : P_\omega\ (S_u) \geq p\ \}$$

Afirmación 2ª: Si $S$ es $F \times [0,t)$-medible, entonces $S^{(p)}$ es $B \times [0,t)$-medible para cada $p > 0$.

(Dem. ver Keisler p. 37).

Para cada $u < t$, la sección $C_u = \{\omega : x(\omega,u) \in B\}$ es cerrada con respecto a la relación $\sim_u$ (ya que $C_u \in A_u$ por ser $x$ adaptado), luego, $C_u$ también es cerrada c.r.a $\approx_{\underline{t}}$ (es relación más fina que $\sim_u$).

Como $x$ es $\Omega \times [0,1)$-medible, $C$ es $\Omega \times [0,t)$-medible. Luego, por la afirmación 1ª, $C$ es $F \times [0,t)$-medible. Por afirmación 2ª, con $p = 1$, $C^{(1)}$ es $B \times [0,t)$-medible. Sin embargo, para cada $\omega \in \Omega$ y $u < t$, $(\omega \restriction \underline{t}) \subseteq C_u$ o bien $(\omega \restriction \underline{t}) \cap C_u = \phi$ (En efecto, supongamos $(\omega \restriction \underline{t}) \cap C_u \neq \phi$ y sea $\omega' \in (\omega \restriction \underline{t})$, es decir, $\omega' \approx_{\underline{t}} \omega$. Hay que probar que $\omega' \in C_u$: existe $\omega''$ con $\omega'' \approx_{\underline{t}} \omega$ y $\omega'' \in C_u$. Como $C_n$ es cerrado bajo $\approx_{\underline{t}}$, tenemos que $\omega \in C_u$, con el mismo argumento obtenemos que $\omega' \in C_u$). Luego, $(\omega, u) \in C \iff P_\omega (C_u) = 1$

$(P_\omega (Cu) = P_\omega (C_u \cap (\omega \upharpoonright \underline{t})) = 1 \Rightarrow (\omega \upharpoonright \underline{t}) \subseteq C_u$

$\Rightarrow \omega \in C_u \Rightarrow (\omega, u) \in C$, recíprocamente, $(\omega, u) \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in C_u \overset{\omega \in (\omega \upharpoonright \underline{t})}{\Longrightarrow} \omega \in C_u \cap (\omega \upharpoonright \underline{t})$

$\Rightarrow C_u \cap (\omega \upharpoonright t) \neq \phi \Rightarrow (\omega \upharpoonright t) \subseteq C_u \Rightarrow$

$P_\omega (C_u) = P_\omega (C_u \cap (\omega \upharpoonright \underline{t})) = P_\omega ((\omega \upharpoonright \underline{t}))$, pero por defición de $P_\omega$, $P_\omega ((\omega \upharpoonright \underline{t})) = 1$, luego, $P_\omega (C_u) = 1)$. Por consiguiente $C = C(1)$
$:= \{(\omega, u) : P_\omega (C_u) = 1\}$. Así, $C$ es $\beta \times [0,t)$-medible.

Definición: $x$ es casi seguramente progresivamente medible si hay un $y$ progresivamente medible tal que $x(\omega,t) = y(\omega,t)$ c.s. en $\Omega \times [0,1]$.

Observación: 1) Si $x$ es $\Omega \times [0,1]$-medible y $x(\cdot,t)$ es $A_t$-medible para todo $t$ en un conjunto $U$ de medida 1, entonces $x$ es c.s. progresivamente medible. Esto ocurre porque la función $y(\omega,t) := \begin{cases} x(\omega,t) & si\ t \in U \\ m_0 & si\ t \notin U \end{cases}$
con $m_0$ fijo en $M$, es progresivamente medible.

2) En el resto de esta sección entregamos algunos resultados generales de la teoría de procesos estocásticos hiperfinitos. No damos todas las demostraciones porque algunas de ellas requieren de algunas técnicas no-standard más poderosas cuya presentación, en este lugar, haría perder visión

general sobre el problema que aquí nos preocupa. Demostraciones pueden ser encontradas en Keisler §7, §8.

Lemma. Si $x$ es $\Omega \times [0,1]$-medible y para casi todo $t$, $\omega \sim_t \omega'$ implica $x(\omega,t) = x(\omega',t)$, entonces $x$ es c.s. progresivamente medible.

Presentamos ahora un teorema sobre levantamientos que envuelve a la filtración $(A_t)$:

TEOREMA: Sea $0 \leq t < 1$. Una variable aleatoria $x(\omega)$ es medible con respecto a la completación $\bar{A}_t$ de $A_t$ si y sólo si $x$ tiene un levantamiento $X(\omega)$ tal que para $s \gtrsim t$, $\omega \approx_s \omega'$ implica $x(\omega) = x(\omega')$.

Dem. Primero supongamos que $x$ tiene un tal levantamiento $X$. Entonces, para cada abierto $U \subseteq M$, $\{\omega: {}^\circ X(\omega) \in U\} \in A_t$ ($\{\omega: {}^\circ X(\omega) \in U\}$ es Loeb-medible por ser ${}^\circ X = x$ c.s., $x$ medible y la familia de conjuntos Loeb-medibles, completa. Además, $\{\omega: {}^\circ X(\omega) \in U\}$ es cerrado bajo $\sim_t$ ).

Como $x(\omega) = {}^\circ X(\omega)$ c.s., tenemos $\{\omega : x(\omega) \in U\} \in \bar{A}_t$ (por razones similares a las recién dadas), luego, $x$ es $\bar{A}_t$-medible.

Ahora, supongamos que $x$ es $\bar{A}_t$-medible.

Sea $y(\omega)$ una variable aleatoria $A_t$-medible tal que $x(\omega) = y(\omega)$ c.s. $y(\omega)$ es variable aleatoria Loeb-medible, luego tiene un levantamiento $Y$ (ver pág. 33). Para cada racional $q > t$, sean $\omega \upharpoonright q := \{\alpha \in \Omega : \alpha \simeq_q \omega\}$

$$\Omega \upharpoonright q := \{\omega \upharpoonright q : \omega \in \Omega\}$$

(recordar que los racionales de $[0,1]$ están en $T$) y

$$y_q\,(w \restriction q) = y(w).$$

Como $y$ es $\mathcal{A}_t$-medible y $q > t$, $w \approx_q w'$ implica $y(w) = (w')$, luego $y_q$ está bien definida en $\Omega \restriction q$. Además, $\Omega \restriction q$ es interno (está definido en términos internos) e $y_q$ es Loeb-medible (porque $y$ lo es). Nuevamente por la prop. en pág. 33, $y_q$ tiene un levantamiento $Y_q$ sobre $\Omega \restriction q$. Definamos $X_q$ sobre $\Omega$ mediante $X_q(w) = Y_q(w \restriction q)$. Entonces $X_q$ e $Y$ son ambos levantamientos de $y$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\mu\,(\rho(X_q(w),\ Y(w)) < \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n}$ ($\mu$ la medida de conteo sobre $\Omega$ que genera a $P$ notar que $[\rho(X_q(\cdot),\ Y(\cdot)) < \frac{1}{n}]$ es interno) y

(2) $w \approx_q w'$ implica $X_q(w) = X_q\,(w')$

Por saturación hay $X$: $\Omega \to M^*$, interna, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $q > t$,

(1') $P\,(\rho(X(w), Y(w) < \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n}$

(2') $w \approx_q w'$ implica $X(w) = X(w')$

(el argumento de saturación se aplica en forma análoga a aquel de la dem. de la proposición en pág. 33). Por (1'), $X$ es un levantamiento de $x$. También, dado que (2') vale para todo $q > t$, (2') vale para algún $s \approx t$.

Introducimos ahora una propiedad de los procesos estocásticos hiperfinitos llamada de "no anticipación" que está en correspondencia con la de medibilidad progresiva:

Definición:

Un proceso estocástico hiperfinito $X$ se llama no anticipante después de $\varepsilon$ si, cuando $\varepsilon \leq \underline{t} \in T$ y $\omega, \omega' \in \Omega$, se tiene que $\omega \simeq_{\underline{t}} \omega'$ implica $X(\omega,\underline{t}) = X(\omega',\underline{t})$.

Es decir, para $\underline{t} \geq \varepsilon$, $X(\omega,\underline{t})$ depende sólo de $\omega(\underline{s})$, $\underline{s} \leq \underline{t}$.

$X$ es no anticipante si hay un $\varepsilon \simeq 0$ tal que $X$ es no anticipante después de $\varepsilon$.

El siguiente teorema sobre levantamiento es importante. El principal motivo para trabajar con la filtración $(A_t)$ en lugar de $(\bar{A}_t)$ es el hacer disponible este resultado:

TEOREMA:

Un proceso estocástico $x$ es c.s. progresivamente medible si y sólo si tiene un levantamiento $X$ que es no anticipante (de hecho, no anticipante después de $0$).

Lemma. Si un proceso estocástico $x$ es continuo y c.s. progresivamente medible, entonces hay un $y$ continuo, progresivamente medible, tal que $x(\omega,\cdot) = y(\omega,\cdot)$ casi seguramente en $\Omega$.
(La demostración usa el teorema que aparece en la pág. 45).

TEOREMA:

Un proceso estocástico $x$ es continuo y c.s. progresivamente medible si y sólo si $x$ tiene un levantamiento uniforme no anticipante $X$.

Observación: En general, $x$ tendrá un levantamiento que es no anticipante después de 0, pero sólo tendrá un levantamiento uniforme que es no anticipante después de algún $\varepsilon \gtrsim 0$. Por este motivo, la noción de proceso no anticipante nos es más útil que la ligeramente más simple de no anticipante después de $0$.

Referencias:


Anderson, R. : "A non-standard representation of Brownian Motion and Ito-Integration". Israel J. Math. 25 (1976).

Keisler, J. : "An Infinitesimal approach to stochastic analysis". Preprint, University of Wisconsin, 1980.

Loeb, P. : "Conversion from non-standard to standard measure spaces and applications to probability theory". Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975).

Henson, C,W. : "Analytic sets, Baire sets and the standard part map". Canadian J. of Math. Vol. XXXI, N° 3, 1979. pp. 663-672.

## § 5. CONSTRUCCION NO STANDARD DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

Recordemos que un Movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{D}, Q)$ es una función $\beta:[0,1]\times\Omega \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $\beta$ es un proceso estocástico, i.e., para cada $t\in[0,1]$, $\beta(t,\cdot)$ es una función medible de $w$ .

ii) para $s < t \in [0,1]$, $\beta(t,w) - \beta(s,w)$ tiene distribución normal con media 0 y esperanza $t-s$.

iii) para $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n \in [0,1]$, $\beta(t_1,\cdot) - \beta(s_1,\cdot),\ldots, \beta(t_n,\cdot) - \beta(s_n,\cdot)$ son variables aleatorias independientes.

iv) para casi todo $w$, $\beta(\cdot,w)$ es una función continua de $t$.

Construiremos a continuación un modelo de los axiomas anteriores, es decir, un Movimiento Browniano:

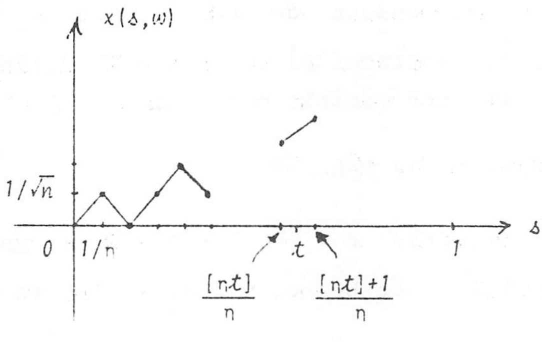
Sea $\eta \in {}^*\mathbb{N}$, (convendremos aquí en que $0 \in \mathbb{N}$); $\Omega := \{-1,1\}^{\eta}$ , el conjunto de todas las $\eta$-tuplas internas con componentes 1 ó -1. Entonces $|\Omega| = 2^{\eta}$ (ver pág. 38, Obs. (1)). Sea $\mathcal{A} := {}^*P(\Omega)$, la $*$-álgebra de los subconjuntos internos de $\Omega$; y $\nu : \mathcal{A} \to {}^*[0,1]$ definida por $\nu(A) = \dfrac{|A|}{2^{\eta}}$ , $A \in \mathcal{A}$.

La definición de $\nu$ refleja equiprobabilidad de resultados y $(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ es un espacio de probabilidad hiperfinito (ver pág. 20) para el experimento $*$-finito de, por ejemplo, lanzar $\eta$ veces una moneda homogénea.

Para cada $\omega \in \Omega$ y $k \leq \eta$, $\omega_k$ es la $k$-ésima componente de $\omega$. Sea, para $t \in {}^*[0,1]$, $x(t,\cdot): \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, definida mediante

$$x(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left( \sum_{i=1}^{[\eta t]} \omega_i + (\eta t - [\eta t])\, \omega_{[\eta t]+1} \right).$$

Entonces $X(\cdot, \omega)$ es una caminata aleatoria unidimensional en el intervalo de tiempo $*[0,1]$ con pasos en los instantes en $T = \{1/\eta, 2/\eta, \ldots, 1\}$ (en $t=0$ parte del origen) de longitud $1/\sqrt{\eta}$ hacia la derecha o izquierda según en el instante $k/\eta$ la componente $\omega_k$ de $\omega$ sea 1 ó -1, resp.. $x(t,\omega)$ da la posición en la caminata (continua mediante la poligonal) correspondiente a la $\eta$-tupla $\omega$ en el instante $t$:




Lemma. 1) Para cada $t \in [0,1]$, $x(t,\cdot)$ es función interna de $\Omega$ en ${}^*\mathbb{R}$.

2) Para cada $t \in [0,1]$, $x(t,\cdot)$ es $\mathcal{A}$-medible.

Dem. 1) $x(t,\cdot) = \{(w,r) \in \Omega \times {}^*\mathbb{R} : r = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^{[nt]} w_i + (nt - [nt])\, w_{[nt]+1} \right)\}$ es conjunto interno, ya que $\Omega \times {}^*\mathbb{R}$ lo es y la fórmula de la derecha también porque $w \upharpoonright \{1, \ldots, [nt]\}$ es interno al ser $w$ y $\{1,\ldots,[nt]\}$ internos. Se usa el criterio de definición interna. Notar que también vale con $t \in {}^*[0,1]$.

Otra manera de establecer este resultado es observando que $x(t,\cdot)$ es una suma $*$-finita ($\{1,2,\ldots, [nt]\}$ es $*$-finito) de variables aleatorias internas, las $\pi_i : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, $w \mapsto w_i$.

2) Sea $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$, por la parte anterior, el conjunto $\{w \in \Omega : x(t,w) \leq \alpha\}$ es conjunto interno, luego, pertenece a $\mathcal{A}$.

Corolario: Si $(\Omega, \mathcal{D}, P)$ es el espacio de Loeb asociado a $(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ ($\mathcal{D} := L(\Omega)$, $P := L(\nu)$), entonces $\beta(t,\cdot) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\beta(t,w) = {}^\circ x(t,w)$ es Loeb-medible para cada $t \in [0,1]$.

Dem. Basta aplicar la prop. en la pág. 26 .

Teorema: Si $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces $\beta : [0,1] \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es un movimiento Browniano en $(\Omega,\mathcal{D},P)$. De hecho, $\beta(\cdot,w)$ es finita para casi todo $w$.

Antes de entregar la demostración damos algunos lemmas y definiciones:

Definición: Una colección $\{X_i\}_{i \in I}$ de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ (i.e. funciones $\mathcal{A}$-medibles de $\Omega$ en $^*\mathbb{R}$) es $*$-independiente si para cada subcolección $*$-finita $\{X_1, \ldots, X_m\}$, $m \in {}^*\mathbb{N}$, y toda m-tupla interna $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in {}^*\mathbb{R}^m$,

$$\nu(X_1 < \alpha_1, \ldots, X_m < \alpha_m) = \prod_{k-1}^{m} \nu(X_k < \alpha_k).$$

La colección $\{X_i\}_{i \in I}$ es S-independiente si para cada subcolección finita $\{X_1, \ldots, X_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, y toda m-tupla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\nu(X_1 < \alpha_1, \ldots, X_m < \alpha_m) \approx \prod_{k=1}^{m} \nu(X_k < \alpha_k)$$

Observación: $\{X_i\}_{i \in I}$ $*$-independiente $\Rightarrow$ $\{X_i\}_{i \in I}$ $S$-independiente.

Lemma. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección $S$-independiente de v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, entonces $\{{}^\circ X_i\}_{i \in I}$ es una colección de v.a. independientes en $(\Omega, \mathcal{D}, P)$.

Dem. Por la prop. en pág. 26 sólo es necesario probar la independencia.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$.

$P({}^\circ X_{i_1} < \alpha_1, \ldots, {}^\circ X_{i_m} < \alpha_m) =$

$P(\bigcup_{n=1, n \in \mathbb{N}}^{\infty} [X_{i_1} < \alpha_1 - \frac{1}{n}, \ldots, X_{i_m} < \alpha_m - \frac{1}{n}])$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\underbrace{X_{i_1} < \alpha_1 - \tfrac{1}{n}, \dots, X_{i_m} < \alpha_m - \tfrac{1}{n}}_{\in \mathcal{A}})$$

(las $X_i$ son $\mathcal{A}$ -medibles)

$$= \lim_{n\to\infty} {}^{\circ}\nu\,(X_{i_1} < \alpha_1 - \tfrac{1}{n}, \dots X_{i_m} < \alpha_m - \tfrac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} {}^{\circ}\prod_{j=1}^{m} \nu(X_{i_j} < \alpha_j - \tfrac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{m} {}^{\circ}\nu\,(X_{i_j} < \alpha_j - \tfrac{1}{n})$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}^{\circ}\nu\,(X_{i_j} < \alpha_j - \tfrac{1}{n})$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \lim_{n\to\infty} P(X_{i_j} < \alpha_j - \tfrac{1}{n})$$

$$= \prod_{j=1}^{m} P\,({}^{\circ}X_{i_j} < \alpha_j)\,.$$

<u>Lemma</u>. (Teorema del límite central en forma no standard)

Sea $\{X_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ una sucesión interna de v.a. *-independientes en $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$. Supongamos que hay una función de distribución standard $F$ tal que $^*F$ es la distribución común de las $X_n$, que $E(X_n) = 0$ y $E(X^2_n) = 1$ para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$. Sea $\Phi$ la función de distribución standard de la ley normal N(0,1). Entonces, para cada $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y cualquier $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$,

$$\nu\Big(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{m} X_n \le \alpha\Big) \simeq {}^*\Phi\,(\alpha)$$

<u>Dem</u>. Ver Anderson op. cit. pág. 27. La demostración usa el teorema del límite central usual.

Dem. (del teorema)

i) Para cada $t \in [0,1]$, $\beta(t,w)$ es $\mathcal{D}$-medible (Corolario, pág. 54) como función de $w$. Luego demostraremos que $\beta(t,w)$ es finita $P$-c.$s$.

ii) Dados $s < t$ en $[0,1]$, sea $\lambda := [nt]-[ns]$ $(\in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$

$$\underset{\frac{[ns]}{n}}{\overset{s}{\vdash}} \qquad \underset{\frac{[ns]}{n}}{\overset{t}{\vdash}}$$

, y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$P(\{w \in \Omega:\ \beta(t,w) - \beta(s,w) \le \alpha\}) =$$

$$P(\{w \in \Omega:\ {}^\circ x(t,w) - {}^\circ x(s,w) \le \alpha\}) =$$

$$P(\{w \in \Omega:\ {}^\circ\Big(\sum_{k=[ns]}^{[nt]} \frac{w_k}{\sqrt{n}}\Big) \le \alpha\}) =$$

$$P(\{w \in \Omega:\ w \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [\sum_{k=[ns]}^{[nt]} \frac{w_k}{\sqrt{n}} \le \alpha + \frac{1}{m}]\}) =$$

$$\lim_{m\to\infty} P(\{w \in \Omega:\ \sum_{k=[ns]}^{[nt]} \frac{w_k}{\sqrt{n}} \le \alpha + \frac{1}{m}\}) =$$

$$\lim_{m\to\infty} P(\underbrace{\{w \in \Omega:\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{[ns]}^{[nt]} w_k \le \sqrt{\frac{n}{\lambda}}\,(\alpha + \frac{1}{m})\}}_{\in \mathcal{A}}) =$$

$$\lim_{m\to\infty} {}^\circ\Big\{\nu(\{w \in \Omega:\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{[ns]}^{[nt]} w_k \le \sqrt{\frac{n}{\lambda}}\,(\alpha + \frac{1}{m})\})\Big\}$$

$$= \lim_{m\to\infty} {}^{\circ *}\Phi\Big(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\,(\alpha + \frac{1}{m})\Big)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Phi\Big({}^\circ\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\,(\alpha + \frac{1}{m})\Big)$$ (ver prop., pág. 32)

$$= \lim_{m\to\infty} \Phi\left(\frac{a + 1/m}{\sqrt{t-s}}\right) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t-s}}\right)$$

Así, queda establecido que

$\beta(t,\cdot) - \beta(s,\cdot) \sim N(0,t-s)$.

iii) Si $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \ldots \leq s_n < t_n \in [0,1]$, entonces $x(t_1,\cdot) - x(s_1 + \frac{1}{n},\cdot),\ldots, x(t_n,\cdot) - x(s_n + \frac{1}{n},\cdot)$ son *-independientes.

Entonces son $S$-independientes. Luego, por el lemma en pá. 55, $\beta(t_1,\cdot)-\beta(s_1,\cdot),\ldots, \beta(t_n,\cdot) - \beta(s_n,\cdot)$ son independientes.

iv) $\beta(\cdot,w)$ es continua en $[0,1]$ y finita $P$-c.s.: Para cada $m$, $n \in \mathbb{N}$, sea $\Omega_{mn} = \{w \in \Omega: \exists i < n, \sup_{\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}} x(t,w) - \inf_{\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}} x(t,w) > \frac{1}{m}\}$

Notar que $\Omega_{mn}$ es interno por estar definido en términos de entidades internas, i.e. $\Omega_{mn} \in \mathcal{A}$.

Se tiene

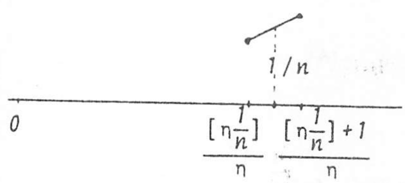
$$\nu(\Omega_{mn}) = \nu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \{w \quad \Omega: (\sup - \inf)_{\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}} x(t,w) > \frac{1}{m}\}\right)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \nu\{w \in \Omega : \underset{\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}}{(\sup - \inf)} x(t,w) > \frac{1}{m}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \nu\{w \in \Omega : \underset{0 \leq t \leq \frac{1}{n}}{(\sup - \inf)} x(t,w) > \frac{1}{m}\}$$

$$= n\, \nu\{w \in \Omega : \underset{0 \leq t \leq \frac{1}{n}}{(\sup - \inf)} x(t,w) > \frac{1}{m}\}$$

$$\leq n\, \nu\{w \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq \lambda} \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left| \sum_{1}^{k} w_i \right| > \frac{1}{2m}\}$$




$\lambda := [\eta/n]+1 \quad (\in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$

$(\lambda = \eta/n + 1$ si $\eta = L!$ con $L \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$

$$= n\, \nu\{w \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq \lambda} \left| \sum_{1}^{k} w_i \right| > \frac{\sqrt{\eta}}{2m}\}$$

$$\leq n\, \nu\{w \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq \lambda} \sum_{1}^{k} w_i > \frac{\sqrt{\eta}}{2m}\} + n\, \nu\{w \in \Omega : \min_{1 \leq k \leq \lambda} \sum_{1}^{k} w_i < -\frac{\sqrt{\eta}}{2m}\}$$

$$\leq 2n\, \nu\{w \in \Omega : \sum_{1}^{\lambda} w_i > \frac{\sqrt{\eta}}{2m}\} + 2n\, \nu\{w \in \Omega : \sum_{1}^{\lambda} w_i < -\frac{\sqrt{\eta}}{2m}\}$$

$$= 4n\, \nu\{w \in \Omega : \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{1}^{\lambda} w_i > \frac{\sqrt{\eta/\lambda}}{2m}\}$$

$$\approx 4n\left(1 - {}^*\Phi\left(\frac{\sqrt{\eta/\lambda}}{2m}\right)\right) = 4n\left(1 - {}^*\Phi\left(\sqrt{\frac{\eta}{[\eta/n]+1}}\ \frac{1}{2m}\right)\right)$$

$$\approx \quad 4\,n\,(1-\Phi\,(\frac{\sqrt{n}}{2m}\,))=\frac{4n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\sqrt{n}}{2m}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$<\ 2\,n\int_{\frac{\sqrt{n}}{2m}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt < 2n\int_{\frac{\sqrt{n}}{2m}} e^{-t/2}\,dt$$

si $\frac{\sqrt{n}}{2m} > 1$ $\quad (e^{-t^2/2} < e^{-t/2}$ si $t > 1)$

$$=\ 4n\ e^{-\frac{\sqrt{n}}{4m}}$$

Así, $\nu\,(\Omega_{mm}) < 4n\,e^{-\frac{\sqrt{n}}{2m}}$ si $\frac{\sqrt{n}}{2m} > 1$ .

Sea ahora $\Omega' := \Omega \setminus \underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_{mn}}_{\in\ \sigma\,(\mathbb{A})} \in \sigma(\mathbb{A})$.

$$P(\Omega') = 1 - \sup_{m}\inf_{n}\ \nu(\Omega_{mn}) \geq 1 - \sup_{m}\inf_{n}\ 4n\,e^{-\frac{\sqrt{n}}{4m}}$$

$$= 1\ .$$

Se tiene:

a) Si $w \in \Omega'$, entonces $\beta(t,w)$ es finita:
En efecto, sea $w \in \Omega$. Si para algún $t \in {}^*[0,1]$ tenemos ${}^\circ x(t,w) = +\infty$ ó $-\infty$, entonces $w \in \Omega_{mm}$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$, y, luego, $w \notin \Omega'$. Así, $w \in \Omega' \rightarrow \beta(t,w)$ es finita.

b) Si $w \in \Omega'$, entonces $\beta(\cdot,\,w)$ es continua:
En efecto, sea $w \in \Omega$. Supongamos $s,\,t \in {}^*[0,1]$, con $s \simeq t$, y que $x(s,w) \not\simeq x(t,w)$.

Si $x(s,w) \not\approx x(t,w)$, entonces $°|x(s,w) - x(t,w)| > 0$. Sea $a := °|x(s,w) - x(t,w)|$. Entonces para $m > \frac{2}{a}$, $w \in \Omega_{mm}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego, $w \notin \Omega'$. Así hemos probado que:

(!) $w \in \Omega'$ y $s \approx t$, $s$, $t \in {}^*[0,1] \Rightarrow x(s,w) \approx x(t,w)$
(de paso obtuvimos un tipo de continuidad de la caminata aleatoria *-finita $x(\cdot,w)$, la llamada microcontinuidad). Hay que probar nuestra aserción inicial:

fijemos $t \in [0,1]$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $w \in \Omega'$.

Sea $A := \{n \in {}^*\mathbb{N} : \forall s \in {}^*[0,1] \ (|t - s| < \frac{1}{n} \to |x(t,w) - x(s,w)| < \varepsilon/2\}$.

Entonces $A$ es interno y contiene todos los enteros en ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (por (!)), entonces $A$ contiene un entero finito $k$ (si no, sería, $A = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ que es externo).

Así $|t-s| < 1/k \to |x(t,w) - x(s,w)| < \varepsilon/2$ con $k \in \mathbb{N}$ y para todo $s \in {}^*[0,1]$. Luego, $|t-s| < 1/k$, $s \in [0,1] \Rightarrow °|x(t,w) - x(s,w)| \leq \varepsilon/2$, pero $°X(t,w)$ y $°X(s,w)$ son finitos (por (a)), luego, para todo $s \in [0,1]$, $|t-s| < 1/k \to °|x(t,w) - x(s,w)| = |°x(t,w) - °x(s,w)| = |\beta(t,w) - \beta(s,w)| < \varepsilon$.

Así, $w \in \Omega' \to \beta(\cdot,w)$ es continua en $[0,1]$.

<u>Corolario</u>: $x(\cdot,w)$ es casi standard en $*C[0,1]$ para casi todo $w$.

<u>Dem</u>. Recordemos primero (págs. 31, 35) que una función $g \in {}^*C[0,1]$ se llama casi standard si para algún $f \in C[0,1]$ se tiene que $°g = f$ con respecto a la topología de la norma del supremo, es decir, (x)
$\sup_{t \in {}^*[0,1]} |{}^*f(t) - g(t)| \approx 0$. Además, si $g$ es casi standard, entonces la la función $h$ definida por $h(s) := °g(s)$, $s \in [0,1]$, es continua en $[0,1]$ y $°g = h$ (en el sentido anterior).

(x) $f$ es la única función de $C[0,1]$ tal que

$g \in \text{mon}(f) = \bigcap_{f \in O,\, \text{abierto}} {}^*O$, esto se tiene

si $f$ es la única función de $C[0,1]$ tal que

$\bigcap_{\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0} {}^*\{h \in C[0,1] : \sup_{t \in [0,1]} |h(t) - f(t)| < \varepsilon\}$, si
transferencia

Veamos ahora la dem. del Corolario.

Sea $\omega \in \Omega'$. Probaremos que ${}^{\circ}x(\cdot,\omega) = \beta(\cdot,\omega)$ (, pero no en el sentido trivial de la definición de $\beta$ mediante $\beta(t,\omega) := {}^{\circ}(x(t,\omega))$, $0 \leq t \leq 1$), en el sentido de la def. en pág. 31, es decir, que $x(\cdot,\omega) \in \bigcap \{{}^*A: A \text{ es vecindad de } \beta(\cdot,\omega)\}$.

Antes notemos que, efectivamente, $x(\cdot,\omega) \in {}^*C[0,1]$, ya que, por el principio de transferencia, una función $g \in {}^*C[0,1]$ ssi $g$ es interna de ${}^*[0,1]$ en ${}^*\mathbb{R}$ y es continua en el sentido que $\forall\, x \in {}^*[0,1]\ \forall\, \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+\ \exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}_+\ \forall\, y \in {}^*[0,1]\ (|x-y| < \delta \rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon)$ (*-continuidad).

Es claro entonces que, siendo $x(\cdot,\omega)$ una poligonal, se tiene la *-continuidad de $x(\cdot,\omega)$.

Ahora, $x(\cdot,\omega) \in \bigcap\limits_{\mathcal{V}} {}^*A \iff$

$$x(\omega,\cdot) \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} {}^*\{f \in C[0,1] : \sup_{t\in[0,1]} |\beta(t,\omega) - f(t)| < \varepsilon\}$$

$$\iff \sup_{t\in {}^*[0,1]} |{}^*\beta(t,\omega) - x(t,\omega)| \simeq 0.$$

Probamos ahora esta última aserción: Para $t \in {}^*[0,1]$

$|{}^*\beta(t,\omega) - x(t,\omega)| \leq |{}^*\beta(t,\omega) - \beta({}^{\circ}t,\omega)| +$

$|\beta({}^{\circ}t,\omega) - x({}^{\circ}t,\omega)| + |x({}^{\circ}t,\omega) - x(t,\omega)| \approx 0$ ,

ya que $|{}^*\beta(t,\omega) - \beta({}^{\circ}t,\omega)| \approx 0$ ($\beta(\cdot,\omega)$ es continua)

$|\beta({}^{\circ}t,\omega) - x({}^{\circ}t,\omega)| \approx 0$ (por def. de $\beta(\cdot,\omega)$), y $|x({}^{\circ}t,\omega) - x(t,\omega)| \approx 0$ (micro continuidad de $x(\cdot,\omega)$)

Luego, $\sup_{t\in{}^{*}[0,1]} |{}^{*}\beta(t,\omega) - x(t,\omega)| \approx 0$ (el supremo existe por ser $\{|{}^{*}\beta(t,\omega) - x(t,\omega)|: t\in{}^{*}[0,1]\}$ acotado superiormente e interno.

Es fácil ver que el supremo debe ser infinitesimal).

Corolario: El espacio $(\Omega,\mathcal{D},P)$ induce una medida en $C[0,1]$ que es una extensión de la medida de Wiener si $n\in{}^{*}\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

En efecto, consideremos el espacio $(C[0,1), \mathcal{E}, W')$ con:

$E\in\mathcal{E} :\iff \{\omega\in\Omega: \beta(\cdot,\omega)\in E\}\in\mathcal{D}$ , $E \subseteq C[0,1]$

$W'(E) := P(\{\omega\in\Omega : \beta(\cdot,\omega)\in E\})$ si $E\in\mathcal{E}$. $(C[0,1],\mathcal{E}, W')$ es una extensión del espacio de medida de Wiener $(C[0,1],\mathcal{B}, W)$: en efecto,

La medida de Wiener $W$ se define como la única medida de Borel en $\mathcal{B}$, el $\sigma$-álgebra de los Borelianos de $C[0,1]$, tal que:

i) $W(\{f\in C[0,1]: f(t) < \alpha\}) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right)$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

ii) Si $s_1 < t_1 \leq \dots \leq s_n < t_n \in [0,1]$, entonces las funciones medibles $\pi_{t_1} - \pi_{s_1}, \dots, \pi_{t_n} - \pi_{s_n}$ son independientes (aquí $\pi_t(f) := f(t)$).

Además, $\mathcal{B}$ es el $\sigma$-álgebra generado por la familia de conjuntos cilíndricos de la forma $\{f(t_1) < \alpha_1, \dots, f(t_n) < \alpha_n\}$.
$f\in C[0,1]$ /

Hay que probar que $\mathcal{E}\supseteq\mathcal{B}$ y que $W'\restriction\mathcal{E} = W$. Para lo primero basta probar que $\mathcal{E}$ contiene a los conjuntos cilíndricos, esto es inmediato, ya que $\{f\in C[0,1]: f(t_1) < \alpha_1\}\in\mathcal{E} \iff \{\omega\in\Omega : \beta(\cdot,\omega)\in\{f\in C[0,1]: f(t_1) < \alpha_1\}\}\in\mathcal{D} \iff \{\omega\in\Omega' : \beta(t_1,\omega) < \alpha_1\}\in\mathcal{D}$ ,

pero $\{\omega\in\Omega' : \beta(t_1,\omega) < \alpha_1\} =$

$\in \mathcal{D}$ por corolario de la pág 54

$$\Omega' \cap \{w \in \Omega : \beta(t_1, w) < \alpha_1\} =$$

$$\Omega' \cap \{w \in \Omega : {}^{\circ}x(t_1, w) < \alpha_1\} =$$

$$\underbrace{\underset{\sigma(\mathcal{A})}{\underset{\cap}{\Omega'}} \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{w \in \Omega : x(t_1, w) < \alpha_1 - \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \sigma(\mathcal{A})} \in \mathcal{D}$$

no es necesario

Finalmente observamos que, por el teorema de la pág. 54, $w'$ satisface las condiciones (i) y (ii). Luego, $w' \restriction \mathcal{B} = w$.

Observación: 1) La medida que extiende a la medida de Wiener en el Corolario anterior es la inducida por la transformación medible de $\Omega'$ en $C[0,1]$ definida por $w \mapsto \beta(\cdot, w)$.

2) Se puede obtener ahora fácilmente un caso particular del teorema de Donsker. Escribimos $\Omega_n$, $\beta_n$, $P_n$, para destacar la dependencia de $n$.

Teorema: (Donsker) $\{w'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente hacia $w'$, es decir, $\int F\, d\, w'_n \to \int F\, d\, w'$ para toda función $F$ acotada y continua de $C[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

Dem. Sean $n_1, n_2 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}$ el $\sigma$-álgebra de Borel en $C[0,1]$. Por el corolario anterior, $w'_{n_1} \restriction \mathcal{B} = w'_{n_2} \restriction \mathcal{B} = w'$ (que aquí es $w$, la medida de Wiener). Luego, si $F: C[0,1] \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, se tiene:

$$\int_{C[0,1]} F dw'_{n_1} = \int_{C[0,1]} F dw'_{n_2} = \int_{C[0,1]} F dw' \quad \text{, entonces}$$

$$\int_{\Omega_{n_1}} F(\beta_{n_1}(\cdot,w)\, d\, P_{n_1}(w) = \int_{\Omega_{n_2}} F(\beta_{n_2}(\cdot,w))\, d\, P_{n_2}(w)$$

$$= \int_{C[0,1]} F d\mu^{*} .$$

Como $F$ es continua y $°(x_{n_i}(\cdot,w)) = \beta_{n_i}(\cdot,w)$, $P_{n_i}$ - casi seguramente (en el sentido del corolario anterior), tenemos
$^*F(x_{n_i}(\cdot,w)) \approx F(\beta_{n_i}(\cdot,w))$ , $P_{n_i}$ - c.s. $(\alpha)$

Como $F$ es acotada, $^*F(x_{n_i}(\cdot,w))$ es $S$-acotada (como función de $w$) (pág. 27), entonces $^*F(x_{n_i}(\cdot,w))$ es $S$-integrable (c.r.a $(\Omega_{n_i}, \mathcal{A}_{n_i}, \nu_{n_i})$ (pág. 27). Además, $^*F(x_{n_i}(\cdot,w))$ es levantamiento de $F(\beta_{n_i}(\cdot,w))$ (de $(\alpha)$), luego (pág. 28), $F(\beta_{n_i}(\cdot,w))$ es Loeb $(\Omega_{n_i})$-integrable y $\int_{\Omega_{n_1}} {}^*F(x_{n_1}(\cdot,w))\, d\, \nu_{n_1}(w) \approx \int_{\Omega_{n_1}} F(\beta_{n_1}(\cdot,w)\, d\, P_{n_1}(w)$

$$= \int_{\Omega_{n_2}} F(\beta_{n_2}(\cdot,w))\, d\, P_{n_2}(w) \approx \int_{\Omega_{n_2}} {}^*F(x_{n_2}(\cdot,w))\, d\, \nu_{n_2}(w) ,$$

Luego, $\int_{\Omega_{n_1}} {}^*F(x_{n_i}(\cdot,w)\, d\nu_{n_i}(w) \approx \int_{\Omega_{n_2}} {}^*F(x_{n_2}(\cdot,w))\, d\, \nu_{n_2}(w)$

para $n_1, n_2 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ .

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ :

$$A := \{m \in {}^*\mathbb{N} : \forall n_1, n_2 \in {}^*\mathbb{N} \ (n_1, n_2 \geq m \rightarrow$$

$$\left| \int_{\Omega_{n_1}} {}^*F(x_{n_1}(\cdot,w))\, d\,\nu_{n_1}(w) - \int_{\Omega_{n_2}} {}^*F(x_{n_2}(\cdot,w))\, d\,\nu_{n_2}(w) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Claramente ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \subseteq A$ y $A$ es interno. Luego, existe $k \in \mathbb{N} \cap A$. Para este $k$ se tiene

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1, n_2 \geq k \rightarrow | \ \% - \% \ | < \varepsilon/2 \ (\gamma)$$

y esto implica que

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1, n_2 \geq k \Rightarrow {}^\circ| \ \% - \% \ | \leq \varepsilon/2$$

Luego, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1, n_2 \geq k \Rightarrow$

$$\left| \int_{\Omega_{n_1}} F(\beta_{n_1}(\cdot,w)\, d\,P_{n_1} - \int_{\Omega_{n_2}} F(\beta_{n_2}(\cdot,w)\, d\,P_{n_2} \right| < \varepsilon$$

Así, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (n \in \mathbb{N})}} \int_{\Omega_n} F(\beta_n(\cdot,w)\, d\,P_n$ existe y es igual a

$${}^\circ\!\int_{\Omega_{n_1}} {}^*F(x_{n_1}(\cdot, w))\, d\,\nu_{n_1}(w) \quad \text{(fijando } n_1 \text{ en}(\gamma))$$

$$= \int_{\Omega_{n_1}} F(\beta_{n_1}(\cdot,w))\, d\,P_{n_1}(w) = \int_{C[0,1]} F\, d\,w'_{n_1} .$$

Así, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (n\in\mathbb{N})}} \int_{\Omega_n} F(\beta_n(\cdot,\omega))\, d\,P_n = \int_{C[0,1]} F\, d\,\omega'_{\eta_1}$

o bien, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (n\in\mathbb{N})}} \int_{C[0,1]} F\, d\,\omega'_n = \int_{C[0,1]} F d\,\omega'_{\eta_1} = \int_{C[0,1]} F d\omega'$ .

# BIBLIOGRAFIA

Muy buenas presentaciones generales del análisis no standard aparecen en:

Keisler, H.J. "Foundations of Infinitesimal Calculus" Prindle, Weber & Schmidt, Inc. 1976.

Davis, M. "Applied Non Standard Analysis". Wiley, 1977.

Luxemburg, W.A.J. "What is Non Standard Analysis?" Amer. Math. Monthly Vol. 80, 6, 1973.

Stroyan, K.D. & Luxemburg, W.A.J. "Introduction to the Theory of Infinitesimals". Ac. Press, 1976.

Presentaciones, también generales, que ofrecen un mayor grado de complejidad a aquellos que no están familiarizados con conceptos y lenguaje de la Lógica Matemática, aunque también excelentes, son:

Robinson, A. "Non standard Analysis" North-Holland, 1966.

Luxemburg, W.A.J. "A General Theory of Monads" en Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability . W.A.J. Luxemburg (ed.), Holt, Rinehart and Wiston, 1969.

En relación con lo presentado en nuestro trabajo, debemos citar, como fuentes principales, los siguientes artículos:

Loeb, P.A. "Conversion from Non standard to Standard Measure Spaces and Applications in Probability Theory". Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 211, 1975.

Anderson, R.M. "A Non standard Representation for Brownian Motion and Itô Integration", Israel J. Math, Vol. 25, 1976.

Keisler, H.J. "An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis" Preprint, U. of Wisconsin, 1980.

La lectura de estos trabajos debería ser la continuación natural de la de estas notas. El artículo de Loeb es un trabajo clave, sin embargo, muchos de sus resultados ya los hemos presentado. El artículo de Anderson presenta, además, una construcción no standard de la integral de Itô. Keisler orienta su trabajo hacia el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Otras publicaciones que complementan nuestras notas y pueden ser leídas sin dificultad son:

Anderson, R.M. & Rashid, S. "A Non standard Characterization of Weak Convergence". Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 69,2, 1978.

Henson, C.W. "Analytic Sets, Baire Sets, and the Standard Part Map" Canadian J. of Math., Vol. 31, 3, 1979.

EDICIONES UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE