Apuntes de Ingeniería 47 (1993) 29-38 (ISSN-0716-0348)

OBSERVACIONES SOBRE LA ACTIVIDAD MATEMATICA

Leopoldo Bertossi D. Dr. Mat. (*)

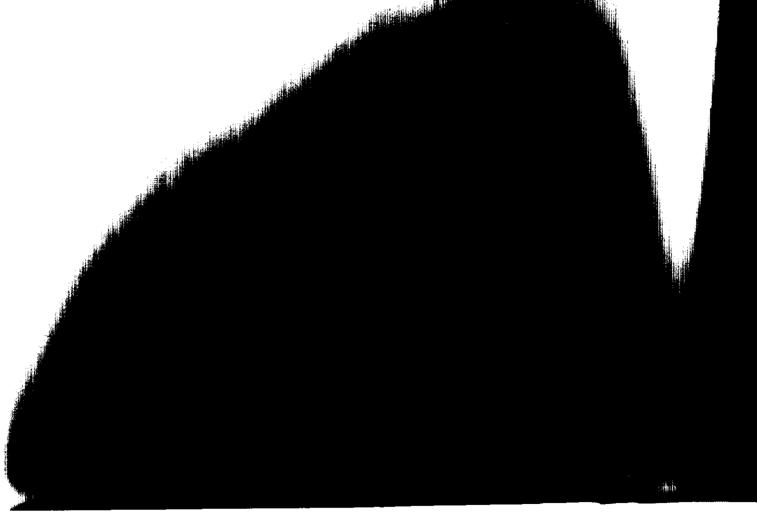
RESUMEN

Este artículo hace algunos alcances sobre la inserción de la actividad matemática en el contexto cultural general y sobre la naturaleza del conocimiento matemático, en especial sobre su "universalidad". También muestra ciertos tipos de problemas matemáticos a los que se ven enfrentados aquellos más interesados en los fundamentos de su área de trabajo. Finalmente discute nuevas tendencias en la matemática y las posibilidades que hay para el matemático de comunicarse, a través de su disciplina, con científicos y profesionales de otras áreas del conocimiento.

ABSTRACT

This article presents some considerations on the role of mathematical activity in the general cultural context and about the nature of mathematical knowledge, specially about its "universality". In addition, some kinds of mathematical problems confronted by those who are interested in the foundations of the discipline are shown. Finally, new trends in mathematics and the possibilities for the mathematician to comunicate through mathematics with scientists and profesionals of other areas of knowledge are discussed.

(*) Depto. Ciencia de la Computación. P. U. Católica de Chile. Casilla 306, Santiago-Chile.



I.- ¿MATEMATICA: MANIFESTACION CULTURAL?

Para un matemático es difícil explicar a una persona que se dedica a otra disciplina, qué hace profesionalmente fuera de dictar los típicos cursos elementales de los primeros años de la universidad. Cuando empieza diciendo que investiga en matemática; nunca falta alguien que de inmediato interrumpe diciendo: ¡¿ pero qué se puede investigar si siempre dos más dos son cuatro ?! Ante esto, el matemático intenta disimular su ligero desagrado o incomodidad con una sonrisa condescendiente.

En efecto, los matemáticos, en lo que se refiere a su amplio ámbito de actividad, están incomunicados con el resto de la comunidad intelectual. Esta incomunicación también se da con las personas llamadas "cultas". Para apreciarla, basta notar que una persona se considera culta si conoce relativamente bien aspectos de literatura, música, pintura; ubica algunos conceptos y nombres en filosofía, psicología y economía. Se considera muy culta si, además, domina algún idioma extranjero, sabe algo de religión, historia, y puede esbozar algunas ideas de física moderna (ojalá relatividad). En este espectro cultural, simplemente no aparece la matemática; ni siquiera geometría elemental y álgebra básica. A pesar de que existe un aparente respeto por la matemática, desde el punto de vista "cultural", ésta no forma parte de la cultura.

Es interesante destacar que, si se le pide a alguien lego en matemática que nombre a un gran matemático, lo más probable es que mencione a Einstein. Sin duda, Einstein fue un gran físico, más aún, personalmente creo que también fue un buen matemático. Sin embargo, nombres de grandes matemáticos, a los cuales nadie negaría su condición de tales, permanecen en la más completa obscuridad. ¿Cuántos han oído hablar de Gauss,Riemann, Hilbert, von Neumann, Goedel?

Es lamentable que la matemática viva en este aislamiento cultural. Los matemáticos, aun cuando experimentan esta soledad intelectual, son poseedores de hermosas y sorprendentes verdades matemáticas, de interesantes métodos de trabajo y formas para abordar problemas que les permiten descubrirlas y, sobre todo, tienen un terreno inagotable donde encontrarlas. Adicionalmente, la matemática presta una gran utilidad a las ciencias exactas y a la técnica. Tradicionalmente ha sido difícil hacer todo esto asequible a los que no se dedican propiamente a la matemática, incluyendo entre éstos aun a los especialistas en otras ciencias exactas, la mayoría de los cuales evita la matemática hasta donde les es posible.

A pesar de lo expresado anteriormente, la matemática es una manifestación cultural, cultivada por un reducido grupo de personas, usada por un grupo algo más amplio y desconocida por la gran masa. Probablemente esto mismo podemos decir sobre otras manifestaciones culturales. No obstante, en contraste con muchas de ellas, como el lenguaje, la religión y la música; la matemática goza de una característica forma de universalidad. La matemática que desarrollan americanos, europeos y orientales es la misma. Podrán variar los temas, formándose las llamadas escuelas. Así es como existieron hasta antes de la segunda guerra mundial la escuela de Goettingen, en Alemania, la escuela polaca, y hoy existen la escuela de probabilidad francesa y la escuela de lógica matemática de Israel. Podrá variar la cantidad y calidad de la matemática producida, pero las verdades matemáticas descubiertas por un japonés y los métodos usados para descubrirlas y demostrarlas serán aceptados por un matemático americano, y recíprocamente. Siempre es posible que uno de ellos no se interese por los resultados del otro, o que estime que los métodos empleados no son los más hermosos (siempre hay una evaluación estética de resultados y métodos). En todo caso, la verdad matemática encontrada por cualquier matemático pasará a formar parte del cúmulo de conocimientos matemáticos universalmente compartidos. Esta es una característica interesante de la actividad matemática: la matemática, en contraste con otras disciplinas del conocimiento, es acumulativa.

Se ha llegado a este caracter universal de la matemática, o, por lo menos, a reconocerlo claramente, no sólo por la naturaleza del conocimiento matemático que, desde el punto de vista epistemológico, no ha cambiado; sino especialmente por el papel clarificador y organizador de aquella área de la matemática llamada fundamentos de la matemática que se desarrolla persistentemente desde fines del siglo pasado y cuyos objetos de estudio son las teorías matemáticas mismas, las estructuras matemáticas en general y las demostraciones matemáticas. Es interesante destacar aquí que se estudia matemáticamente los objetos y métodos matemáticos. Esta situación aparentemente paradójica se resuelve distinguiendo cuidadosamente los niveles de lenguaje.

II.- PRINCIPIOS DISCUTIBLES

Precisamente el área de los fundamentos de la matemática, es un ejemplo para ilustrar algunas de las aseveraciones hechas más arriba, algunos tipos de problemas a los que siempre se está enfrentando un matemático, y la forma en que los define y aborda. Además, este ejemplo muestra que la aludida universalidad del conocimiento matemático no siempre se ha dado o, por lo menos, ha parecido no existir, al formarse grupos fuertemente antagónicos de matemáticos con distintas filosofías de la matemática. El ejemplo proviene de la teoría de conjuntos, campo matemático relativamente nuevo, de unos cien años de antiguedad, y sus objetos son susceptibles de ser estudiados matemáticamente sin ser los típicamente exhibidos, como los números enteros o las figuras geométricas. Además, los conjuntos son objetos suficientemente abstractos como para que algunos les nieguen la calidad de objetos reales. No obstante, para los matemáticos son completamente reales y, de hecho, susceptibles de ser abordados con la intuición.

Cuando se estudia matemáticamente un ámbito de objetos, como el de los conjuntos, se destacan sus propiedades y las relaciones entre ellos que son de interés. En seguida, con apoyo en la intuición y/o experiencia sobre estos objetos, se establecen los llamados axiomas o postulados, que son las verdades básicas, fundamentales, que se dan en el universo de objetos. Se intenta ser lo más austero posible en la elección de estos axiomas. Y esto no sólo porque es más elegante proceder de este modo, sino también porque es deseable tener un sistema de verdades o hipótesis básicas que sea fácil de manejar y, eventualmente, someter a revisión. Una vez elegidos los principios fundamentales, se intenta obtener las demás verdades a partir de los axiomas. Otras afirmaciones sobre los objetos, aunque tengan una validez evidente, son aceptadas como verdaderas en la medida que se encuentre para ellas demostraciones matemáticas cuyas hipótesis se encuentran entre los axiomas. Entonces, estas afirmaciones pasan a formar parte de la lista de teoremas de la teoría del universo de los objetos en estudio.

En el caso de la teoría de conjuntos hay ciertos axiomas universalmente aceptados que fueron explícitamente establecidos a principio de siglo por Zermelo y Fraenkel. Sin entrar en los detalles, se designa, como es usual, mediante **ZF** a esta colección de axiomas. Por ejemplo, entre estos axiomas hay uno que establece que para cada conjunto, existe otro conjunto cuyos elementos son los subconjuntos del conjunto original. Para ilustrar, dado el conjunto **{e1 , e2 , e3}**, un conjunto cuyos elementos son precisamente sus subconjuntos es **{{e1} , {e2} , {e3} , {e1 , e2} , {e1 , e3} , {e2 , e3} , {e1 , e2 , e3} , 0}** (**0** es el conjunto vacío, que no tiene elementos). Este axioma es fácil de aceptar. Otro axioma dice dados conjuntos cualesquiera, existe otro conjunto que se obtiene reuniendo todos los elementos de los conjuntos originales. Por ejemplo, si tenemos los conjuntos **{a , b} , {c} , {d , e}**, entonces el conjunto **{a , b , c , d , e}** es precisamente el que se obtiene uniendo los tres originales.

Hasta fines del siglo pasado, en algunas demostraciones matemáticas se hacía uso inadvertido del siguiente hecho relativo a los conjuntos; llamado Principio de Elección (**PE**) : dada una colección arbitraria de conjuntos no vacíos que no se intersectan, existe otro conjunto que está formado exactamente por un elemento de cada uno de los conjuntos originales.

Gráficamente, el principio anterior puede ilustrarse de la siguiente forma:

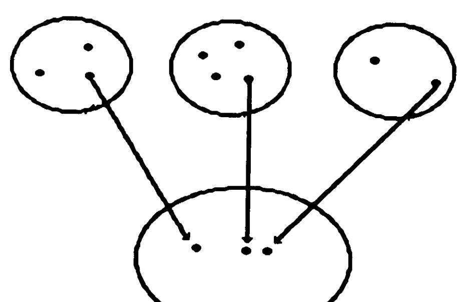


FIGURA 1 El Principio de Elección

Algunos matemáticos de la época rechazaron la validez de este principio y, por consiguiente, aquellas demostraciones que lo usaban. Ellos argumentaron que este principio no indica método alguno para obtener, o construir, el nuevo conjunto, cuya existencia se asegura, a partir de los conjuntos iniciales. En definitiva, no dice cómo hay que hacer la elección de elementos. Se puede mencionar que algunos matemáticos importantes de la época rechazaron demostraciones de teoremas que aseguraban la existencia de algún objeto matemático cuando esta demostración solamente establecía la existencia, sin construir el objeto en cuestión. Por ejemplo, ante elegantes demostraciones de esta naturaleza dadas por Hilbert para algunos nuevos teoremas, algunos matemáticos expresaban que aquello eso no era matemática sino teología o que decían que el método era misterioso, siniestro (unheimlich) (Reid, 1970).

En cuanto al principio de elección, en algunas demostraciones fue posible eliminar su uso, en otras, no fue posible hacerlo. Esta imposibilidad se ilustra mediante un ejemplo. Al aceptar el principio de elección, se puede demostrar el llamado principio de buena ordenación (**PBO**) que afirma que cualquier conjunto puede ser bien ordenado, es decir, los elementos de un conjunto arbitrario A, pueden ser dispuestos ordenadamente en una línea orientada, (de menor a mayor) de modo tal, que cada subconjunto no vacío de **A**, digamos **S**, tiene un elemento menor que todos sus otros elementos.

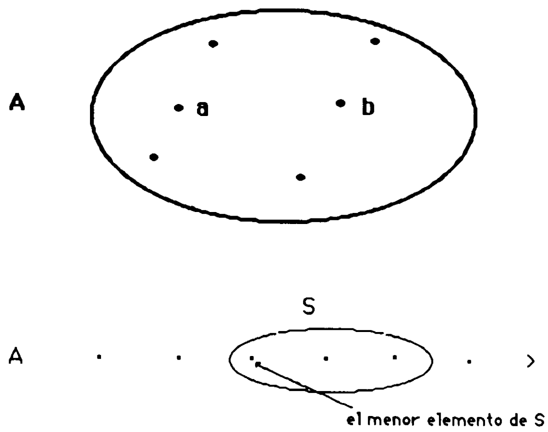


FIGURA 2 El Principio de Buena Ordenación

Entonces,

ZF y PE ===> PBO (1)
(implican)

Ahora, también se puede demostrar que **ZF y PBO** implican **PE,** es decir, si **PBO** es verdadero, entonces, necesariamente, **PE** es verdadero. En consecuencia, con respecto a los axiomas **ZF** de la teoría de conjuntos, el principio de elección y el principio de buena ordenación son equivalentes. Luego, en la formulación (o la demostración) del principio de buena ordenación está esencialmente contenido el principio de elección.

Actualmente la mayoría de los matemáticos acepta el principio de elección como verdadero, argumentando que, si bien este principio no entrega una manera general, uniforme, de hacer las elecciones de elementos, en cada caso concreto, por muy arbitrario que sea, se puede hacer la selección, que es todo lo que expresa el principio. Aquellos matemáticos que lo rechazan, no obtendrán ni aceptarán entre sus teoremas aquellos que, involucran inevitablemente en su demostración al principio de buena ordenación. Es peciso notar que el principio de buena ordenación es de la misma naturaleza que el principio de elección: no dice cómo hacer el buen orden del conjunto.

No es extraño, después de mencionar esta controversia con respecto al principio de elección, que se tenga la sensación de estar contradiciendo una aseveración hecha mucho antes, a saber, aquella sobre la universalidad de las verdades matemáticas. Sin embargo, no hay tal contradicción, ya que la que es verdadera es la implicación

$$\text{ZF y PE} \Longrightarrow \text{PBO} \tag{2}$$

pero esta implicación es lógicamente equivalente a la implicación

$$\text{ZF} \Longrightarrow (\text{PE} \Longrightarrow \text{PBO}) \tag{3}$$

y ésta sí será aceptada por cualquier matemático (que acepte al menos la lógica clásica). En particular, un matemático que no crea en el principio de elección (ni en el principio de buena ordenación) aceptará como válida la implicación **PE ===> PBO** (sobre la base de los otros axiomas de la teoría de conjuntos) aunque no crea ni en el antecedente ni en el consecuente de esta última implicación.

III.- PRINCIPIOS REDUNDANTES

A la luz de discusión anterior, una pregunta surge naturalmente: ¿no será que el principio de elección (o, equivalentemente, el principio de buena ordenación) ya se ha aceptado desde el momento en que se acepta los otros axiomas **ZF** de la teoría de conjuntos; en el sentido que el principio de elección es una consecuencia lógica de los otros axiomas? En otros términos, ¿no será válida la implicación **ZF ===> PE** ? En el caso de una respuesta positiva, se está hablando de un axioma redundante.

Preguntas como la anterior, le surgen a cualquier matemático que se interese por los fundamentos axiomáticos de la teoría en que trabaja, y, de hecho, no son nuevas. Trecientos años antes de Cristo, Euclides, en su famoso escrito Elementos, presentó por primera vez axiomas, o postulados, concernientes a la geometría y desarrolló la teoría correspondiente partiendo de éstos. A pesar de ciertas imperfecciones, este tratado determinó, precisamente, la forma de desarrollar todas las teorías matemáticas hasta nuestros días, o aun más la forma de aproximarse matemáticamente a los distintos fenómenos que se estudian en el ámbito científico. Uno de los postulados de Euclides, el quinto, afirma esencialmente, que dado un punto fuera de una recta, existe una recta, paralela a la anterior, que pasa por el punto dado.

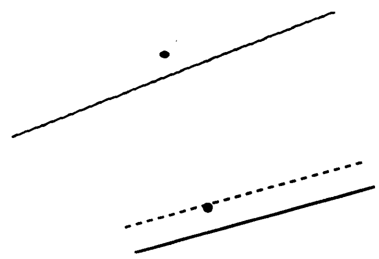


FIGURA 3 El Principio de las Paralelas

A través de los siglos se intentó demostrar el quinto postulado partiendo de los otros postulados de la geometría. Sin embargo, recién en el siglo pasado se demostró que este postulado no es consecuencia de los otros.

¿Hay algún método para demostrar que un determinado axioma de una teoría no se deduce de los otros axiomas de la teoría? Por ejemplo, volviendo al universo de los conjuntos, ¿cómo demostrar que **PE** no es consecuencia de **ZF**? La simple observación de nuestro universo de conjuntos no basta, pues, en él, tanto a los axiomas de **ZF** como a **PE** se ven como verdaderos, pero nada más. Se ven sólo los hechos y no las relaciones de implicación entre ellos. Este no es un problema relativo a un solo dominio, en este caso, el de los conjuntos, sino que es un problema lógico. Se dice que **PE** es consecuencia de los axiomas de **ZF** siempre y cuando en todo dominio donde son válidos los axiomas de **ZF**, necesariamente también es válido **PE**. Luego, según esta definición, para demostrar que **PE** no es consecuencia de **ZF**, basta con demostrar que existe un dominio donde los axiomas de **ZF** son verdaderos y **PE** no lo es. Es necesario explicar que, al verificar la validez de los axiomas en un dominio distinto de aquel que los motivó, los objetos, propiedades y relaciones sobre los que hablan los axiomas, deben ser reinterpretados adecuadamente como objetos, propiedades y relaciones en este nuevo dominio.

En 1964, P.J. Cohen demostró, usando este método, que el principio de elección no se puede deducir de los axiomas de ZF. Este resultado, de enorme importancia, resolvió un problema abierto por mucho tiempo, que se refiere a un principio tan determinante en la forma de hacer matemática, como el principio de elección, e introdujo conceptos relevantes y técnicas ingeniosas para construir modelos que establecen la independencia de axiomas (Cohen, 1966).

Preguntas de este tipo son interesantes en sí mismas y, a veces, tanto ellas como sus respuestas pueden tener consecuencias insospechadas. Por ejemplo, para responder negativamente a la pregunta clásica sobre la posibilidad de deducir el quinto postulado de Euclides sobre la base de los otros postulados de la geometría, hubo que demostrar la existencia de un espacio geométrico donde son válidos todos los axiomas de Euclides excepto el de las paralelas. Hay espacios, entonces, donde, dados una recta y un punto fuera de ella, no hay rectas que pasen por el punto que sean paralelas a la recta. También hay espacios donde se pueden trazar infinitas rectas paralelas a la recta dada por el punto fijo fuera de ella. La existencia de estos extraños espacios geométricos y la correspondiente teoría matemática proporcionaron, varias décadas después de su descubrimiento, el marco apropiado para modelar matemáticamente la teoría de la relatividad. Actualmente, estos espacios no euclideanos son objetos naturales y habituales en la física y en la matemática.

IV.- NUEVAS TENDENCIAS

El ejemplo anterior muestra la fuerte interacción que ha habido tradicionalmente entre la física y la matemática. En particular, en el siglo pasado y en la primera mitad de éste, la física y la matemática se vieron mutuamente enriquecidas y se produjeron grandes avances en ambas por problemas y herramientas que ponía una disciplina a disposición de la otra. Por supuesto, esta fuerte dependencia todavía se da, pero, en las dos últimas décadas, y en forma cada vez más intensa, es el desarrollo de la computación teórica y aplicada el que ha presentado a la matemática los desafíos más importantes y atractivos. En especial, en el complejo ámbito de la matemática discreta y en el terreno de la lógica matemática, cuyos conceptos y métodos se aplican masivamente en áreas como inteligencia artificial, bases de datos, programación en lógica y funcional, derivaciones formales y demostraciones de correctitud de programas, especificaciones de software, complejidad computacional y fundamentos de la computación.

Se ha visto un impresionante vuelco de las actividades e intereses de los lógicos matemáticos hacia la ciencia de la computación, como resultado de los interesantes desafíos que la computación ha puesto a la lógica matemática y de los importantes aportes que la lógica ha entregado al desarrollo de la computación. Más aún, los problemas presentados a la lógica formal por parte de la ciencia de la computación han permitido a los lógicos matemáticos reencontrase con sus raíces filosóficas y fundacionales de los métodos científicos. Previamente habían desviado sus actividades originales hacia la investigación en teorías muy específicas y poco fundamentales que son más bien propias de lo que comunmente se llama matemática pura. Desde hace varios años, la investigación y la docencia en lógica aplicada a la computación son actividades comunes en los departamentos de computación de las mejores universidades del mundo.

La fuerte influencia de la computación en la actividad matemática actual queda claramente establecida en el Congreso Internacional de Matemática de Berkeley, en 1986. Estos enormes congresos internacionales de matemática se efectúan cada cuatro años y reúnen a los matemáticos, quienes presenta y discuten los temas y tendencias más importantes de la matemática del momento. El de Berkeley 1986 marcó nítidamente esta nueva tendencia:

> "The Congress itself was distinguished by an increasing emphasis on computer science. The New York Times headlined MATHEMATICIANS FINALLY LOG ON. Steve Smale, Berkeley's own Field Medalist (Moscow 1966), led off the stellar lineup of fifteen plenary speakers with the lecture on "Complexity aspects of nuemerical analysis" - a far cry from his Moscow lecture on "Differentiable dynamical systems". The problem-solving abilities of computers, he pointed out, have created a challenge that is philosophical, logical and mathematical: "This subject is now likely to change mathematics itself. Algorithms become a subject of study, not just a means of solving problems". (Albers, Alexanderson, Reid, 1987).

Un alto porcentaje de las conferencias plenarias del congreso de Berkeley tuvo que ver con aspectos matemáticos de la computación.

Algunas tendencias actuales en la actividad matemática son discutidas en mayor detalle por Bertossi (1988).

V.- CONCLUSIONES

A la luz de los aspectos de la actividad matemática que se han mostrado, se puede intentar identificar algunos de los factores que influyen en el aislamiento de esta actividad con respecto a otras manifestaciones culturales y aun con respecto a otras ciencia exactas. Con seguridad, un factor que obstaculiza esta comunicación es el hecho que el matemático descubre verdades sobre objetos que, con frecuencia, son abstractos, pero a los cuales él, en su trabajo, no atribuye una existencia distinta a la de cualquier objeto material. Por otro lado, el carácter acumulativo de la matemática hace, por la gran cantidad de conceptos y resultados que ésta ha originado, que aumente el nivel de complejidad del lenguaje. Este lenguaje es de por sí, en extremo preciso y carente de relieves subjetivos, y puede ayudar a facilitar la comunicación, por lo menos en el sentido más masivo que se echa de menos.

A pesar de los factores que influyen en la dificultad de la comunicación de la matemática, esta comunicación es posible, y ella depende fuertemente del interés del matemático por establecerla. Si éste tiene conocimientos amplios y profundos, y es capaz de evitar una abstrusa terminología y notación matemáticas, entonces gran parte de los obstáculos se superan.

Finalmente, otro elemento esencial para mejorar la comunicación entre el matemático y el resto de la comunidad, es la búsqueda de la interacción interdisciplinaria. En el último tiempo podemos observar avances importantes en ese terreno: disciplinas del conocimiento, como la economía, la psicología, la sociología, la biología, y la misma computación, tienden sostenidamente a un mayor grado de matematización.

El área de fundamentos de la matemática es vasta e interesante y sólo se ha tocado en este artículo unos pocos ascpectos. Otros temas relacionados con los fundamentos de la matemática y la actividad matemática pueden ser encontrados en los excelentes libros (Crossley et al., 1972; Davis y Hersh, 1981; Nidditch, 1983 y Wilder, 1965)

REFERENCIAS

1. ALBERS, D. J., ALEXANDERSON, G. L., RIED. C. (1987) **International Mathematical Congresses**, Springer-Verlag, Nueva York.
2. BERTOSSI, L. (1988) Algunas Tendencias en la Matemática Actual, **Revista Universitaria, Vol 23**, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago.
3. COHEN, P.J. (1966) **Set Theory and the Continuum Hypothesis**, Benjamin, Nueva York.

4. CROSSLEY, J. et al. (1972) **What is Mathematical Logic?**, Oxford Univ. Press, Oxford.
5. DAVIS, P.D. y HERSH, R. (1981) **The Mathematical Experience**. Birkhauser, Boston.
6. NIDDITCH, P.H. (1983) **El Desarrollo de la Lógica Matemática.** Ediciones Cátedra, Madrid.
7. RIED, C. (1970) **Hilbert**, Springer-Verlag, Nueva York.
8. WILDER, R. (1965) **Introduction to The Foundations of Mathematics.** John Wiley and Sons, Nueva York.